Centrala satser om inversa och om implicit givna funktioner

AMII, kap 5, Sats 5.3: (Om inversa funktioner)

Låt $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ vara av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ med kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$.

Då finns en differentierbar invers till $\boldsymbol{f}$ i någon omgivning av $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ om och endast om

$$\det\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a})\right] \neq 0.$$

Inversens Jacobimatris beräknas enligt

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}^{-1}}{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}) = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\right]^{-1}, \text{ där } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}).$$

Eller, med andra beteckningar,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{y}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\right]^{-1}.$$

Observera att inversen i allmänhet bara finns lokalt i en omgivning av $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$). Se exempel 5.3 sid 95.

AMII, kap 5, Sats 5.4: (Om implicit definierade funktioner)

Om $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ är en funktion av typ $\mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}^n$ med kontinuerliga partiella derivator och punkten $(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ sådan att

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o) = \mathbf{0} \text{ och}$$

$$\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o) \neq 0,$$

så finns i en omgivning av punkten $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_o$ precis en funktion $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ med kontinuerliga (partiella) derivator, för vilken

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y}_o = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_o).$$

Jacobimatrisen för denna funktion ges av

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}.$$

Övningar:

L16.1. Visa *medelvärdessatsen för reellvärda funktioner*:

Om f är en differentierbar funktion av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, så gäller om $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och hela sträckan mellan dessa punkter ligger i funktionens definitionsmängd, att

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = (\text{grad}\, f(\xi))\cdot(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}),$$

där ξ är en punkt på sträckan mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$.

(Tips: Satsen kan återföras på envariabelvarianten genom att man studerar $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$-funktionen $\phi(t) = f(t\boldsymbol{a} + (1 - t)\boldsymbol{b})$ och använd kedjeregeln.)

AMII 5.1, 5.3, 5.5.

Dagens uppgift AMII 5.5