SF2710, VT08, lekt 19

Riemannintegraler

AMI, kap 7, AMII kap 9

Definition av Riemannintegral för funktioner av typen **R** $[a, b] \to \mathbf{R}$

Förberedande definitioner:

En *indelning* **I** (*partition*) av intervallet $[a, b]$ ges av ett ändligt antal tal $x_0, x_1, \ldots, x_N$ sådana att

$$a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_{N-1} < x_N = b.$$

En indelnings *diameter* δ är längden av det längsta indelningsintervallat, dvs.

$$\delta = \max_{i = 1, \ldots N} (x_i - x_{i-1})$$

Låt $f(x)$ vara en funktion $[a, b] \to \mathbf{R}$, låt

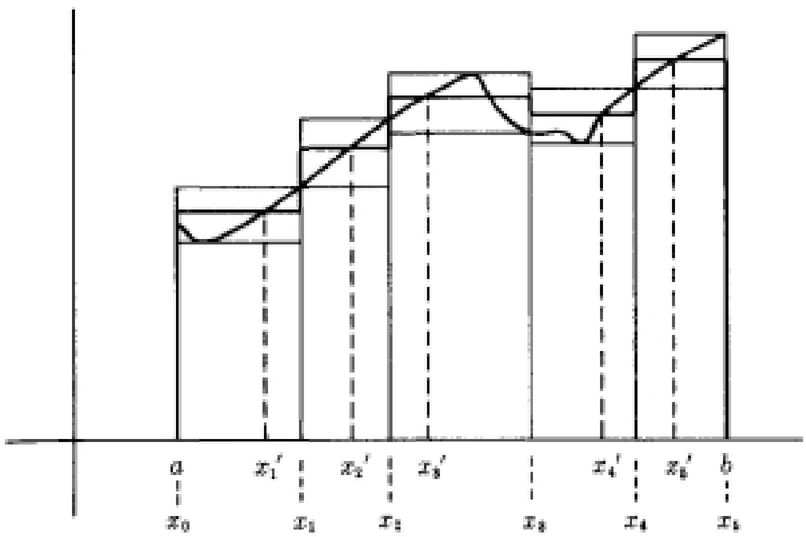
$$a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_{N-1} < x_N = b.$$

vara en indelning av $[a, b]$ och låt x_i', $i = 1, \ldots, N$, vara tal i intervallen $x_{i-1} \le x_i' \le x_i$,

då är

$$S = \sum_{i=1}^{N} f(x_i')\,(x_i - x_{i-1})$$

en *Riemannsumma* till f (i intervallet $[a, b]$).



Definition av *Riemannintegral*:

Om f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ och det finns ett tal A sådant att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$, sådant att för *varje* Riemannsumma S med diameter $< \delta$ gäller

$$|S - A| < \varepsilon,$$

så kallas detta tal A (som måste vara unikt – tänk efter varför!) (*Riemann-*)*integralen* av f över intervallet $[a, b]$, och skrivs

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funktionen sägs då vara *integrerbar*.

De funktioner som är konstanta på varje indelningsintervall i en indelning av $[a, b]$ kallas *sträckvis konstanta*. En sträckvis funktion är *överfunktion* $V(x)$ resp. *underfunktion* $U(x)$ om

$$U(x) \le f(x) \le V(x).$$

Exempel på funktioner som inte är integrerbara:

a. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ i $0 \le x \le 1$,

b. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, i $0 \le x \le 1$,

c. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{då } x \text{ rationellt,} \\ 0, & \text{då } x \text{ irrationellt,} \end{cases}$ i $0 \le x \le 1$,

I a-fallet kan situationen ”räddas” . Visserligen existerar det inget tal $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. på det sätt definitionen anger, men däremot är funktionen integrerbar över alla intervall

$$X \le x \le 1,\ \text{där } 0 < X < 1\text{:}\quad \int_X^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x. = 2(1 - \sqrt{X}).$$

varför $\displaystyle\lim_{X \to 0+} \int_X^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x. = 2$. Man säger i att funktionen är *generaliserat* Riemannintegrerbar och skriver i alla fall att $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2$.

Viktiga integrabla klasser av funktioner:

f är *kontinuerlig* på $[a, b]$ *f* integrerbar på $[a, b]$. (Sats sid 123 och övn 5)

Mera generellt:

Om **I** är en indelning av $[a, b]$ och *f* är kontinuerlig och begränsad på varje indelningsintervall, (x_{i-1}, x_i), så är *f* integrerbar på $[a, b]$.

(Sådana funktioner kallas *styckvis kontinuerliga*.)

f är *monoton* på $[a, b]$ *f* integrerbar på $[a, b]$.

Viktigare allmänna egenskaper

Om $f(x)$ och $g(x)$ är integrabla, så är

(i) $\int_a^b (k\, f(x) + l\, g(x))\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx + l \int_a^b g(x)\, dx$, ($k$ och l konstanter),

(ii) $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$,

(iii) $f(x) \geq g(x)$ för $a \leq x \leq b$ $\quad \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$,

och speciellt, om $f(x) \geq 0$, så är $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$,

(iv) (Triangelolikheten för integraler)

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

(v) (Integralkalkylens huvudsats) (AMI, sats 7.2).
Om $f'(x)$ är integrerbar i intervallet (a, b) och f är kontinuerlig även då $x = a$ och $x = b$, så är

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

(vi) (Integralkalkylens medelvärdessats) (AMI sats 7.4)
Om f är kontinuerlig i $[a, b]$ så finns ett c $\quad (a, b)$ sådant att

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)\,(b - a).$$

(vii) (Existens av primitiv funktion, ”antiderivata”), (AMI, sats 7.5)
Om f är kontinuerlig i $[a, b]$ så är

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt$$

($viii$) (Partiell integration) AMI §7.3.2
Om f och g är kontinuerliga i $[a, b]$ och har styckvisa derivator som är integrerbara, så är

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = (f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a)) - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$

.

(ix) (Substitution) AMI §7.3.2
Om f är kontinuerlig i ett öppet intervall U och ϕ kontinuerlig i ett öppet intervall $V : V \to \phi(V)$ $\quad U$ samt g har en integrerbar derivata så gäller för godtyckliga a och x $\quad V$,

$$\int_a^x f(\phi(u))\, \phi'(u)\, du = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(x)} f(v)\, dv.$$

. (Integraluppskattning av summor) AMI, sid 350.

Visa att om $f(x) > 0$ är en avtagande funktion och M och N heltal $M < N$, så är

$$f(N) \le \sum_{n=M}^{N} f(n) - \int_{M}^{N} f(x)\,dx \le f(M)$$

samt att motsvarande med ombytta olikheter gäller om f är växande:

$$f(M) \le \sum_{n=M}^{N} f(n) - \int_{M}^{N} f(x)\,dx \le f(N)$$

Ledninmg: Rita figurer! Åskådliggör summorna genom att låta termerna svara mot staplar med bredden 1.

Teknik för att bevisa riemannintegrabiltet (AMI, kap K7)

Vi betraktar i fortsättningen endast *begränsade* funktioner f, (dvs sådana vars graf kan stängas in i ett "horisontellt" band). I varje indelningsintervall $[x_{k-1},x_k]$ har funktionen då ett supremum M_k och ett infimum m_k (M_k och m_k sammanfaller med funktionens maximum respektive minimum i intervallet om dessa finns — vilket de exempelvis alltid gör för kontinuerliga funktioner.)

Summorna

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

och

$$s_\Delta = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

kallas *funktionens över-* resp *undersumma* hörande till indelningen Δ.

Definition K6.1:

Vi säger att funktionen $f(x)$, $a \le x \le b$, *har en smal graf* om det finns en funktion $N(D)$ sådan att

$$\lim_{D \to 0} N(D) = 0 \qquad \text{(R)}$$

och

$$S_\Delta - s_\Delta \le N(D)$$

där D är diametern till indelningen Δ.

Sats K6.4: (Om existens av Riemannintegral)

Om $f(x)$ har en smal graf i intervallet $[a,b]$, så finns ett tal I sådant att

$$|R_\Delta(f) - I| \le N(D),\ N(D) \to 0 \text{ då } D \to 0,$$

för varje Riemannsumma som hör till en indelning Δ med diameter $\le D$.

Speciellt konvergerar varje följd av Riemannsummor, med diametrar som går mot 0, mot talet I, dvs $f(x)$ är integrerbar och

$$\int_a^b f(x)\,dx = I$$

Sats K6.2:
De i intervallet *monotona* funktionerna har en smal graf.

Sats K6.3:
De funktioner som är *kontinuerliga* i intervallet har smal graf.

Multipelintegraler (AMII kap 9)

Definition 9.1: (Dubbelintegral över axelparallella rektanglar)
Om funktionen $f(x,y)$ är definierad i en rektangel

$$\Omega = \{(x,y);\ a \leq x \leq b\ ,\ c \leq y \leq d\ \}$$

sådan att *varje* följd av Riemannsummor $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots$, vars respektive diametrar $\to 0$ då $i \to \infty$, konvergerar, så säger man att $f(x,y)$ är (*Riemann–*)*integrerbar* i Ω**.** Följdens gränsvärde skrivs

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

och kallas *dubbelintegralen* av f över Ω

Definition 9.2: (Måttet 0, begreppet "nästan överallt")
En delmängd Γ av $\mathbf{R}^2$ sägs ha *måttet* 0 (noll) om man för varje $\varepsilon > 0$ kan omsluta den med en följd cirklar $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_i, \ldots\ldots$ vars sammanlagda area[1] är mindre än ε.

En funktion som är kontinuerlig utom i en mängd med måttet 0, sägs vara kontinuerlig *nästan överallt*

Svårbevisad sats!

Sats 9.1: (Om existens av Riemannintegraler)
Dubbelintegralen

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ,$$

där Ω är en axelparallell rektangel, existerar om och endast om $f(x,y)$ är kontinuerlig nästan överallt och begränsad i rektangeln.

Definition 9.3: (Dubbelintegral över godtyckliga begränsade områden)
Om Ω är en begränsad mängd så är

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ = \ \iint_{\Sigma} F(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

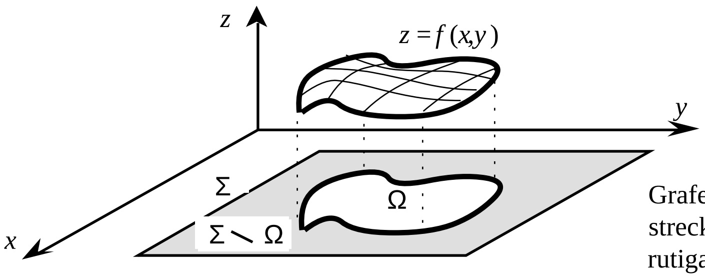
där Σ är någon axelparallell rektangel som omfattar Ω och

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{då } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{då } (x,y) \in \Sigma \setminus \Omega \end{cases}$$

Fig nästa sida

---

1 Den "sammanlagda arean" beräknas som en oändlig serie $\sum_{i=1}^{\infty} \pi r_i^2$, där r_i är $\mathbf{C}_i$:s radie.



Grafen för F är den streckade *och* den rutiga ytan.

Definition 9.4: (Area av plant ytstycke)

$$\textit{Arean}\text{ av } \Omega = \iint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

De begränsade delmängder av planet som på detta sätt tilldelas en area kallas *kvadrerbara*. eller (Jordan–)*mätbar*

Sats 9.3:

Likheterna

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

gäller om de ingående integralerna existerar. Speciellt gäller detta alltid då $f(x,y)$ är kontinuerlig.

Sats 9.8: (Substitution i dubbelintegraler)

Om $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ är en *kontinuerligt deriverbar* och *inverterbar* funktion av typ $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ och avbildar området Ω' i $\boldsymbol{t}$–planet på området Ω i $\boldsymbol{x}$–planet,
och om funktionaldeterminanten $\det(\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t})) \neq 0$ *nästan överallt* i Ω' så är

$$\iint_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega'} f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))\,|\det\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t})|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

för alla integrerbara funktioner $f(x,y)$.

Övningar:

L19.1 Visa att funktionen $f(x) = 1$ om x **Q** och $= 0$ om x **Q** inte är Riemannintegrabel på intervallet $0 \leq x \leq 1$.

L19.2 Låt $f(x) = 1/p$ om $x = q/p$, om p och q är heltal utan gemensamma delare och $= 0$ för övriga x-värden. Är f Riemannintegrabel på intervallet $0 \leq x \leq 1$?

AMII: 9.2 och 9.3

Dagens uppgift: L19.1