SF2710, VT08, lekt 20

Riemannintegraler

Teknik för att bevisa Riemannintegrabiltet (AMI, kap K7)

Vi betraktar endast *begränsade* funktioner f, (dvs sådana vars graf kan stängas in i ett ”horisontellt” band). I varje indelningsintervall $[x_{k-1},x_k]$ har funktionen då ett supremum M_k och ett infimum m_k (M_k och m_k sammanfaller med funktionens maximum respektive minimum i intervallet om dessa finns — vilket de exempelvis alltid gör för kontinuerliga funktioner.)

Summorna

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

och

$$s_\Delta = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

kallas *funktionens över-* resp *undersumma* hörande till indelningen Δ.

Definition K6.1:
Vi säger att funktionen $f(x)$, $a \le x \le b$, *har en smal graf* om det finns en funktion $N(D)$ sådan att

$$\lim_{D \to 0} N(D) = 0$$

och

$$S_\Delta - s_\Delta \le N(D)$$

där D är diametern till indelningen Δ.

Sats K6.4: (Om existens av Riemannintegral)
Om $f(x)$ har en smal graf i intervallet $[a,b]$, så finns ett tal I sådant att

$$|R_\Delta(f) - I| \le N(D),\ N(D) \to 0 \ \text{ då } \ D \to 0,$$

för varje Riemannsumma $R_\Delta(f)$ som hör till en indelning Δ med diameter $\le D$.
Speciellt konvergerar varje följd av Riemannsummor, med diametrar som går mot 0, mot talet I, dvs $f(x)$ är integrerbar och

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I.$$

Sats K6.2:
De i intervallet *monotona* funktionerna har en smal graf.

Sats K6.3:
De funktioner som är *kontinuerliga* i intervallet har smal graf.

Man vet mer än så: (Lebegues sats)

Funktionen $f(x)$ är Riemannintegrerbar i $[a, b]$ omm den mängd x för vilken f är diskontinuerlig för varje $\varepsilon > 0$, kan inneslutas i en mängd intervall, vars sammanlagda längd är $< \varepsilon$.

(f Riemannintegrerbar $\Leftrightarrow$ Mängden av diskontinuitetspunkter har ”måttet 0”.). Beviset är komplicerat.

”Moderna” definitioner av ln och exp.

Def:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,\ x > 0.$$

Detta definierar en funktion med den kontinuerliga och positiva derivatan $\frac{1}{x}$. Funktionen $\ln x$ är därför strängt växande. Den har alltså en strängt växande invers och den inversen kallar vi $\exp x$ (även e^x).

Skiss av en lärogång som bl.a. utmynnar i egenskaper hos och räknereglerna för funktionerna i fråga:

1. $\ln(1/x) = -\ln x$ (hjälpmedel: substitutionsräkning)
2. $\ln x \to \infty$ då $x \to \infty$ (litet knepigare, man kan t.ex visa att $\int_1^{2^n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t > n$ genom att titta litet närmare på underfunktionen $u(x) = 2^{-m}$, då $2^{m-1} \le x < 2^m$.)
3. Kombinera 1. och 2. för att konstatera att $\ln x$ har definitionsmängd $\{x \quad \mathbf{R};\ x > 0\}$ och värdemängd **R**, varav att $y = \exp x$ har definitionsmängd **R** och värdemängd $\{y \quad \mathbf{R};\ y > 0\}$.
4. *Definiera* talet e som exp 1.
5. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ (hjälpmedel: substitutionsräkning).
6. $(\exp u) \cdot (\exp v) = \exp(u + v)$ (hjälpmedel: 4).
7. $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$ och $(\exp u) / (\exp v) = \exp(u - v)$ (hjälpmedel: kombinera 1. och 4.).
8. *Definiera* x^α ($\alpha \quad \mathbf{R}$) som $\exp(\alpha \cdot \ln x)$ och härled sedan att

   $\ln(x^\alpha) = \alpha \cdot \ln x$, $(\exp u)^\alpha = \exp(u \cdot \alpha)$. (hjälpmedel: substitutionsräkning).

Övningar:

L20.1 Visa att varje mängd som består av ett *uppräkneligt* antal punkter, för varje $\varepsilon > 0$ kan inslutas i en union av intervall vars sammanlagda längd är $< \varepsilon$. (Tips: Lägg ett intervall av längd $\varepsilon / 2^n$ kring den n:te punkten i mängden).

L20.2 Tillämpa Lebegues sats (nämnd ovan) och resultatet i L20.1, på övning L19.2. (Tips: Visa att funktionen är kontinuerlig i alla irrationella punkter.)

L20.3 Utför några av härledningarna i skissen ovan.

Dagens uppgift: L 20.2