SF2710, VT08, lekt 21

Teman för dagen:

- Generaliserade (enkel)integraler AMI, §9.4.
- Multipelintegraler AMII §9
  - Generaliserade multipelintegraler AMII, §9.6
- Andra typer av integraler
  - Linjeintegraler (”Arbetsintegraler”). AMII, §10
  - Linjeintegraler med avseende på båglängd. (”Massintegraler”) AMII, §11.7.1
  - Ytintegraler (”Flödesintegraler”) AMII, §11.2
  - Ytintegraler (”Massintegraler”) AMII, 11.7.1

Övningar:
AMI: 9.10 l
AMII: 9.9f
AMII: 11.3

Generaliserade integraler

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty} \int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to a+} \int_X^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Konvergenskriterier för integraler. AMI, kap 9.4

Majorantprincipen för positiva integrander:

$$0 \le f(x) \le g(x) \text{ och } \int^{a} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergent}$$

$$\int^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergent}$$

$$0 \le f(x) \le g(x) \text{ och } \int^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ divergent}$$

$$\int^{a} g(x)\mathrm{d}x \text{ divergent}$$

Jämförelseprincipen för positiva integrander:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ och } \int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ antingen båda} \\ \text{konvergenta eller båda divergenta.} \end{array} \right.$$

Speciellt:

$$f(x) = \frac{c}{x^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{x^{\beta}}\right)$$

där $c \neq 0$ och $\beta > \alpha$

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{är} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{konv. om } \alpha > 1, \\ \text{div.om } \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$f(x) = \frac{c}{x^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{x^{\beta}}\right)$$

där $c \neq 0$ och $\beta < \alpha$

$$\int_0 f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{är} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{konv. om } \alpha < 1, \\ \text{div.om } \alpha \geq 1 \end{array} \right.$$

Principen om absolut konvergens:

$$\int^{a} |f(x)|\, dx \quad \text{konvergent}$$

$$\int^{a} f(x)\, dx \quad \text{konvergent}$$

Multipelintegraler (AMII kap 9)

Definition 9.1: (Dubbelintegral över axelparallellella rektanglar)

Om funktionen $f(x,y)$ är definierad i en rektangel
$\Omega = \{(x,y);\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$
sådan att *varje* följd av Riemannsummor S_1, $S_2, \ldots, S_i, \ldots$, vars respektive diametrar $\to 0$ då $i \to \infty$, konvergerar, så säger man att $f(x,y)$ är (*Riemann-*)*integrerbar* i Ω. Följdens gränsvärde skrivs

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

och kallas *dubbelintegralen* av f över Ω

Definition 9.2: (Måttet 0, begreppet ”nästan överallt”)

En delmängd Γ av $\mathbf{R}^2$ sägs ha *måttet* 0 (noll) om man för varje $\varepsilon > 0$ kan omsluta den med en följd cirklar $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_i, \ldots\ldots$ vars sammanlagda area är mindre än ε.

En funktion som är kontinuerlig utom i en mängd med måttet 0, sägs vara kontinuerlig *nästan överallt*

Svårbevisad sats!

Sats 9.1: (Om existens av Riemannintegraler)
Dubbelintegralen

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ,$$

där Ω är en axelparallell rektangel, existerar om och endast om $f(x, y)$ är kontinuerlig nästan överallt och begränsad i rektangeln.

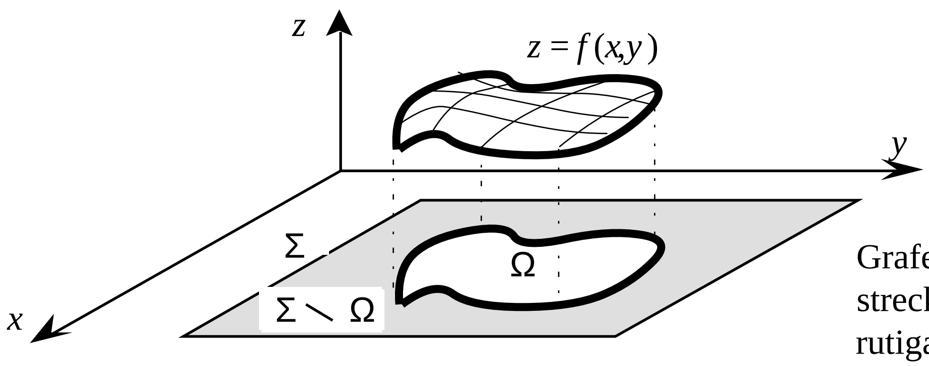
Definition 9.3: (Dubbelintegral över godtyckliga begränsade områden)
Om Ω är en begränsad mängd så är

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} F(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

där Σ är någon axelparallell rektangel som omfattar Ω och

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{då } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{då } (x, y) \in \Sigma - \Omega \end{cases}$$

Fig nästa sida



Grafen för F är den streckade *och* den rutiga ytan.

Definition 9.4: (Area av plant ytstycke)

$$\textit{Arean} \text{ av } \Omega = \iint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

De begränsade delmängder av planet som på detta sätt tilldelas en area kallas *kvadrerbara*. eller (Jordan-)*mätbar*

Sats 9.3:

Likheterna

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

gäller om de ingående integralerna existerar. Speciellt gäller detta alltid då $f(x, y)$ är kontinuerlig.

Sats 9.8: (Substitution i dubbelintegraler)

Om $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ är en *kontinuerligt deriverbar* och *inverterbar* funktion av typ $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ och avbildar området Ω' i $\boldsymbol{t}$–planet på området Ω i $\boldsymbol{x}$–planet,

och om funktionaldeterminanten $\det(\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t})) \neq 0$ *nästan överallt* i Ω' så är

$$\iint_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\, dxdy = \iint_{\Omega'} f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))\, \left|\det \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t})\right|\, dudv$$

för alla integrerbara funktioner $f(\boldsymbol{x})$.

(Svårbevisad sats!)

Generaliserade dubbelintegraler

Definition 9.5: (AMII 9.6.2)

Man säger att delmängderna Ω_1, $\Omega_2, \ldots, \Omega_i, \ldots$, är en *uttömmande följd* till Ω om

a. delmängderna Ω_i är begränsade och har en area,

b. $\Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \ldots \quad \Omega_i \quad \ldots \quad \Omega,$

c. avståndet från origo till mängden $\Omega - \Omega_i$ växer mot ∞ då $i \to \infty$.

Definition 9.6:

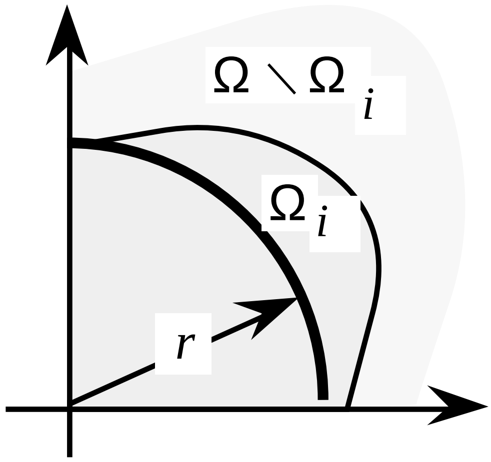
Låt Ω vara en obegränsad mängd och $f(x,y)$ en begränsad funktion. Om gränsvärdet

$$I = \lim_{i \to \infty} \iint_{\Omega_i} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

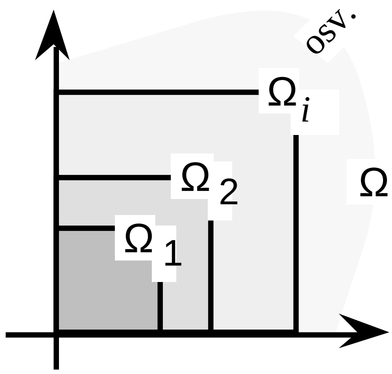
är oberoende av vilken uttömmande följd Ω_1, $\Omega_2, \ldots, \Omega_i, \ldots$, som valts till Ω så är

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = I.$$

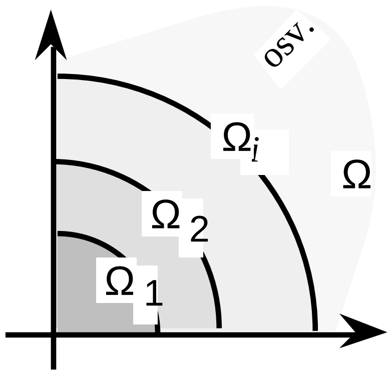
Om I är reellt är integralen *konvergent* och i motsatt fall *divergent*.



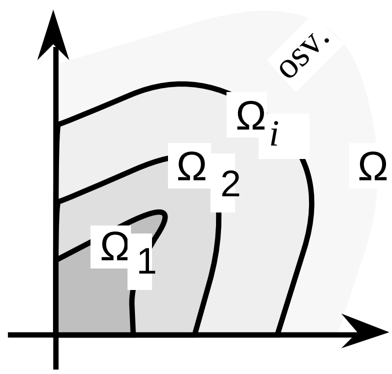
Ω \ Ω i
Ω i
r



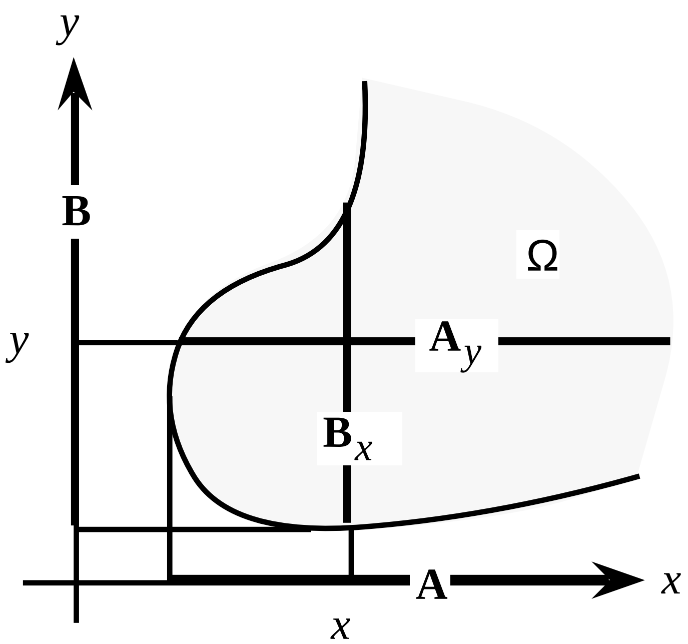
osv.
Ω i
Ω 2
Ω 1
Ω



osv.
Ωi
Ω 2
Ω 1
Ω



osv.
Ωi
Ω 2
Ω 1
Ω



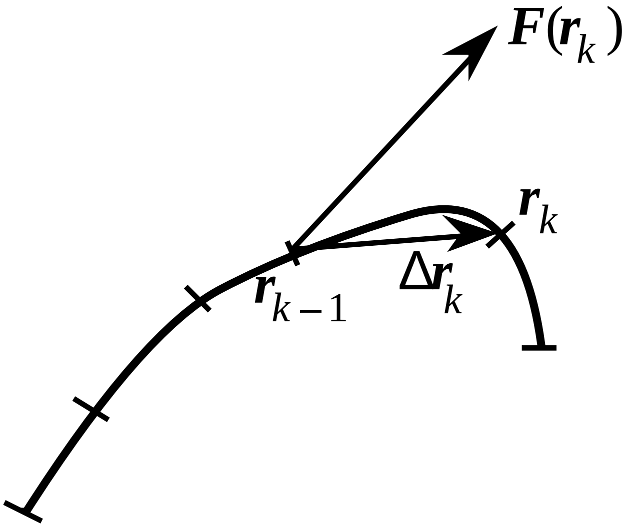
Om $f \geq 0$ och någon av de upprepade enkelintegralerna

$$\int_{\mathbf{A}} \left[\int_{\mathbf{B}_x} f(x, y)\, dy \right] dx \quad \text{och} \quad \int_{\mathbf{B}} \left[\int_{\mathbf{A}_y} f(x, y)\, dx \right] dy$$

existerar, så är detta värde $= \iint_{\Omega} f(x, y)\, dxdy$.

Andra typer av integraler

- Linjeintegraler (Kap 10)
  Två olika typer:
  ”Arbetsintegraler” Def 10.1 sid 262



$$S = \sum_k \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_k)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_k \quad (*)$$

Låt $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ vara en funktion av typ $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ och låt Γ vara en riktad kurva som helt ligger i funktionens definitionsmängd. Om summorna

$$S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots$$

bildas som i (*) med en motsvarande maximal indelningslängd L_i som $\to 0$ då $i \to \infty$, så skrivs gränsvärdet av summorna (om det existerar):

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_\Gamma (P, Q)\cdot(\mathrm{d}x, \mathrm{d}\,y) = \oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

Om $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (P(x, y), Q(x, y))$ är kontinuerlig och Γ är en regulär, riktad kurva med en parameterframställning:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \left(\text{alternativt} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \right)$$

där t: $a \to b$,

så är $$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{\alpha}^{b} [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)] \;\; dt,$$

dvs.

$$\oint_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy =$$

$$\oint_{\alpha}^{b} [P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t)] dt.$$

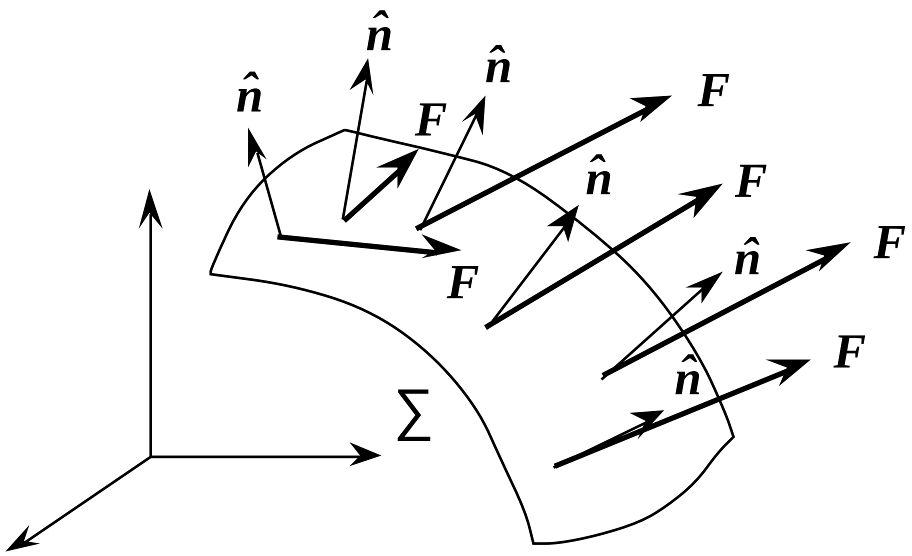
Definition 11.5a. (Linjeintegral av masstyp, båg-längdsintegral) AMII. §11.7.1

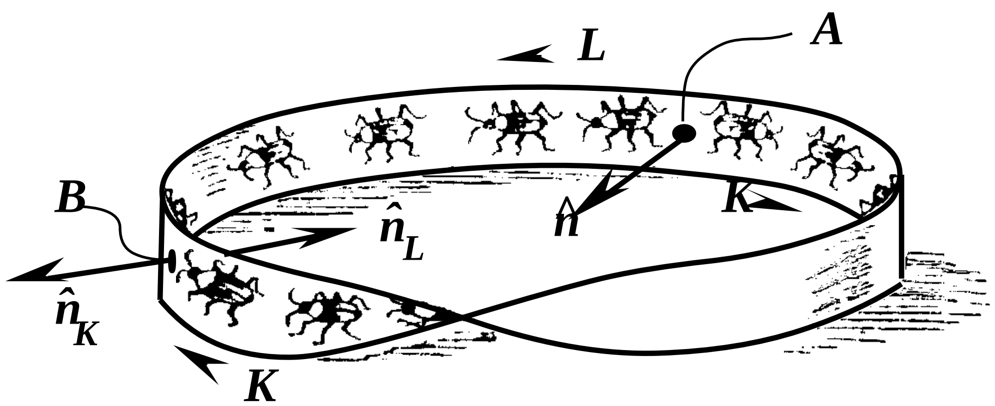
Om Γ är en regulär kurva i $\mathbf{R}^3$ (eller $\mathbf{R}^2$) och $f(\boldsymbol{r})$ är en funktion av typ $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ (respektive $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$), styckvis kontinuerlig på Γ, så är

$$\oint_{\Gamma} f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s = \oint_{\alpha}^{b} f(\boldsymbol{r}(t))|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,\mathrm{d}t,$$

där $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \le t \le b$, är någon inverterbar parameterframställning av kurvan Γ.

Om **L** är styckvis regulär så är $\oint_{\Gamma} f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s$ summan av båglängdsintegralerna över de olika reguljära del-kurvorna.





Sats 11.1: (Tillräckligt villkor för orienterbarhet)

Om en regulärt ytstycke ∑ har en parameterfram-ställning

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}),$$

där $\boldsymbol{w}$ $\mathbf{D}$, sammanhängande och $\mathbf{R}^2$ och där $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w})$ är en funktion $\mathbf{D} \rightarrow \sum$ med *kontinuerlig invers*, så är ∑ en orienterbar yta

Ytintegral

Ytintegralen (eller *flödesintegralen*)

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\sigma,$$

av fältet $\boldsymbol{F}$ över den orienterade reguljära ytan Σ med parameterframställningen $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{w}),\ \boldsymbol{w} = (u,v) \quad \mathbf{D} \quad \mathbf{R}^2$ samt normalfältet $\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})$ är

$$= \pm \iint_{\mathbf{D}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w}))\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

där tecknet + respektive – väljs allt eftersom $\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)$ har samma eller motsatt riktning som $\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})$.

Om en yta Σ är sammansatt av ett ändligt antal reguljära ytstycken (dvs. styckvis regulär) så är $\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\sigma$ summan av ytintegralerna över de olika delytstyckena.

Definition 11.5b.

(Ytintegral av masstyp) AMII, §11.7.1

Om Σ är en regulär yta i $\mathbf{R}^3$ och $f(\boldsymbol{r})$ är en funktion av typ $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, styckvis kontinuerlig på Σ, så är

$$\iint_{\Sigma} f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{\mathbf{D}} f(\boldsymbol{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

där $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, (u,v) $\mathbf{D}$ $\mathbf{R}^2$, är någon inverterbar parameterframställning av ytan Σ.

Om en yta Σ är sammansatt av ett ändligt antal reguljära ytstycken (dvs. styckvis regulär), så är $\iint_{\mathbf{D}} f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\sigma$ summan av ytintegralerna över de olika delytstyckena.