Dagens teman

- **Mängdlära – forts.**
  Relationer och funktioner
  (AEE §1.2-3, AMII §K1.2)

- **Definition av de naturliga talen, Peanos axiom.**

Relationer och funktioner

Relationer

Generell definition:

> En *relation* **R** på mängden **A** är detsamma som en *delmängd* av produktmängden **A** × **A**.

Man skriver ofta

*a***R***b* i stället för (*a*,*b*)   **R,**

Ex.vis

$a < b$, för olikhetsrelationen för reella tal.

$a = b$, för identitet

En viktig typ av relationer är de s.k. *ekvivalensrelationerna* vars definierande egenskaper är

1. *a***R***a*, för alla *a*   **R**. (Reflexivitet)
2. *a***R***b*   *b***R***a*, för alla *a* och *b*   **R**. (Symmetri)
3. *a***R***b* och *b***R***c*   *a***R***c*. (Transitivitet)

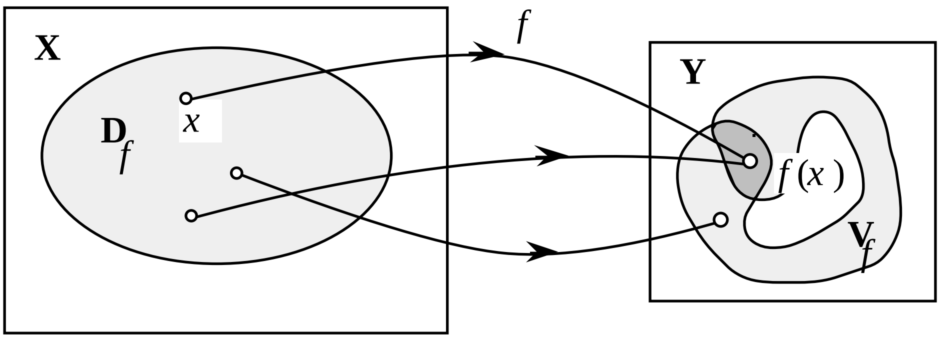
Se kompendiet om reella tal, §1.3, särskilt ex 1.3.7.

Funktioner (Se AM II, §K1.2)

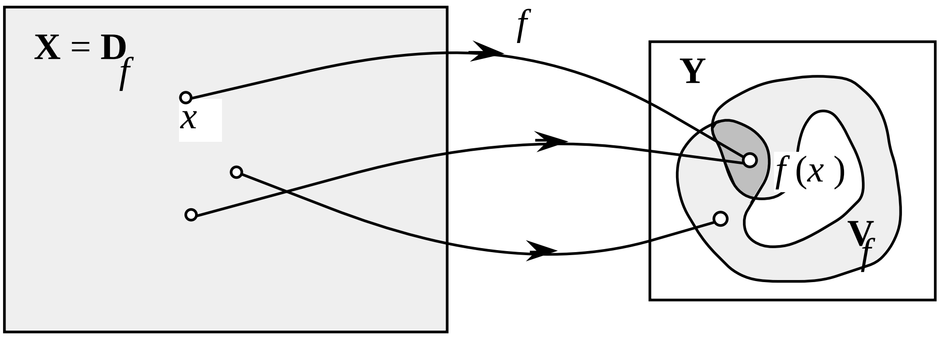
Generell (halvmodern) definition:

En tillordning som till varje element i en mängd **X** ordnar [högst] ett element i en mängd **Y** kallas en *funktion* från **X** till **Y**.
Den sägs vara av *typ* **X** → **Y**.

Variant 1: [högst]



Variant 2: ~~[högst]~~



Generell (modern) definition:

En funktion f från mängden **X** till mängden **Y** är detsamma som en delmängd av produktmängden $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, sådan att

1° Om (x, y) f och (x, z) f,
så är $y = z$,

[2° För varje x **X** finns något y **Y**
så att (x, y) f.]

(Punkten 2° utgår för varianten 1.)

Vanligen skriver man

$y = f(x)$ i stället för (x, y) f.

Mängden f omtalad i definitionen är också funktionens *graf*.

Villkoren 1° utsäger att en funktion, för *varje x* **X,** bara har högst *ett* (1) värde y.

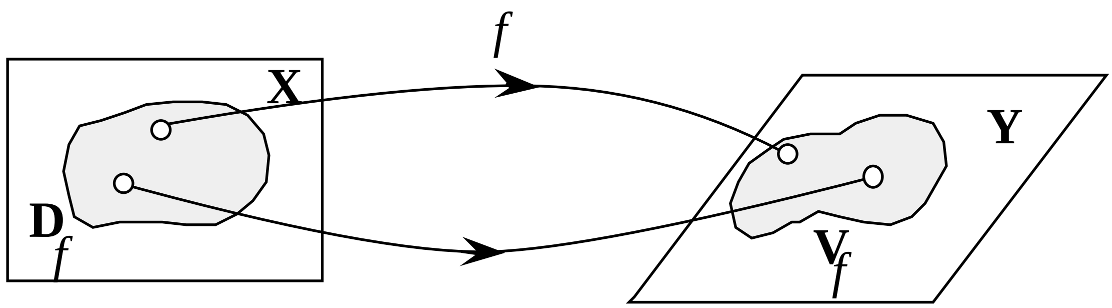
Viktiga glosor:

Definitionsmängd av (*domain* of) *f*.

Värdemängd till (*range* of) *f*.

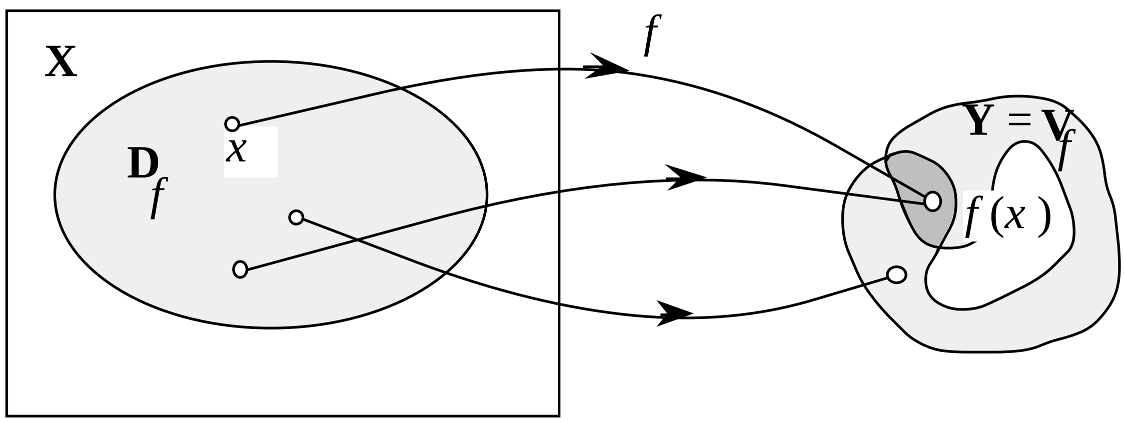
Injektion (*injection*)

Om *olika* element i X tillordnas *olika* element i Y sägs funktionen vara en *injektion*.



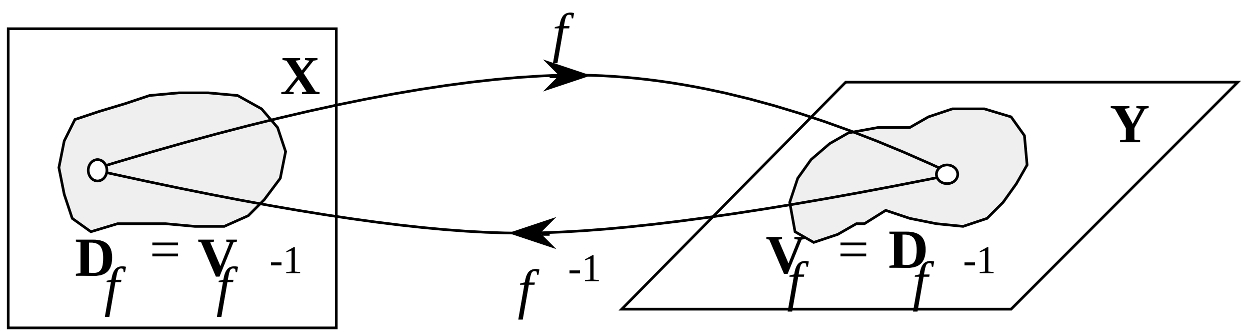
Surjektion (*surjection*)

Om $\mathbf{V}_f = \mathbf{Y}$**,** så sägs funktionen vara en *surjektion*



f avbildar *på* **Y**

f är en *bijektion* (*bijection*) ⇔
f injektion och surjektion
Injektioner f har en *invers funktion* f^{-1}



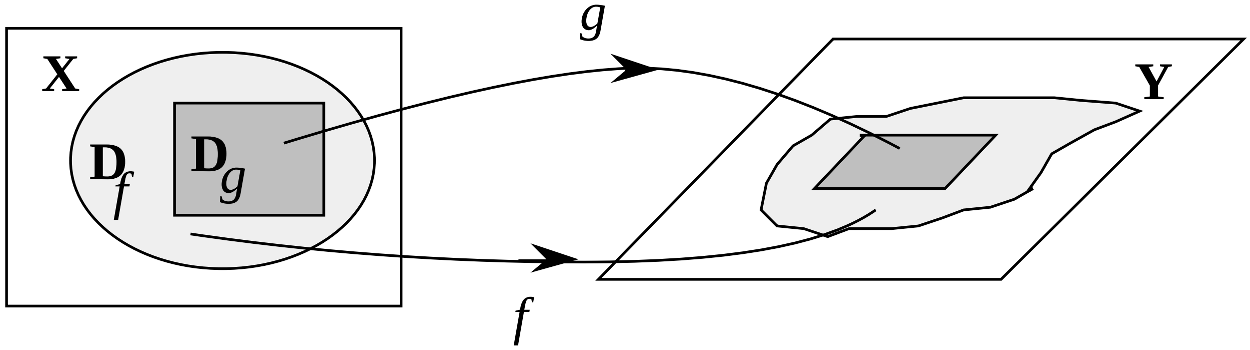
Restriktion (*restriction)*

Om för två funktioner *f* och *g* gäller att

$\mathbf{D}_f$ $\mathbf{D}_g$ och $f(x) = g(x)$ för alla x $\mathbf{D}_g$

så säger man att funktionen *g* är *restriktionen* av *f till mängden* $\mathbf{D}_g$.

Observera att *f* och *g* betraktas som *olika* funktioner.

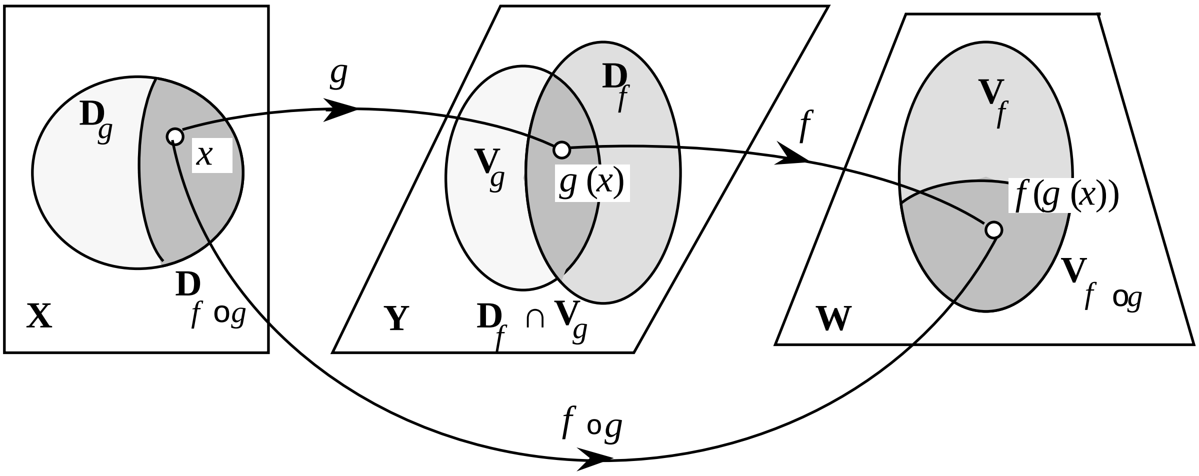


Sammansättning (*composition*),

Om g är en funktion av typ $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ och f en av typ $\mathbf{Y} \to \mathbf{W}$ så är tillordningen

$$w = f(g(x))$$

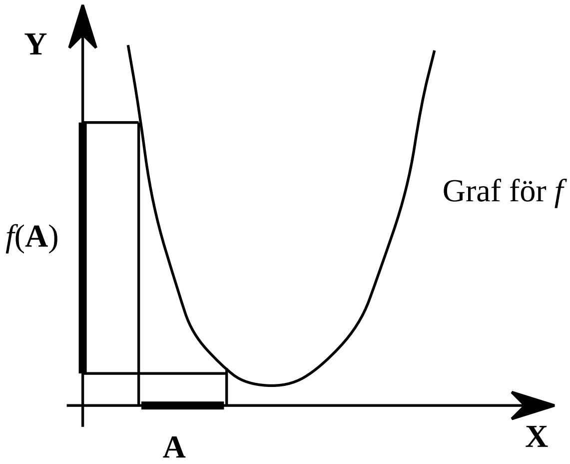
en funktion av typ $\mathbf{X} \to \mathbf{W}$ – den *sammansatta funktionen*, $f \circ g$, till f och g.



Om f är av typen $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ och $\mathbf{A}$ $\mathbf{X}$, så betecknas mängden

$$\{y \quad \mathbf{Y};\ y = f(x) \text{ för något } x \quad \mathbf{A}\}$$

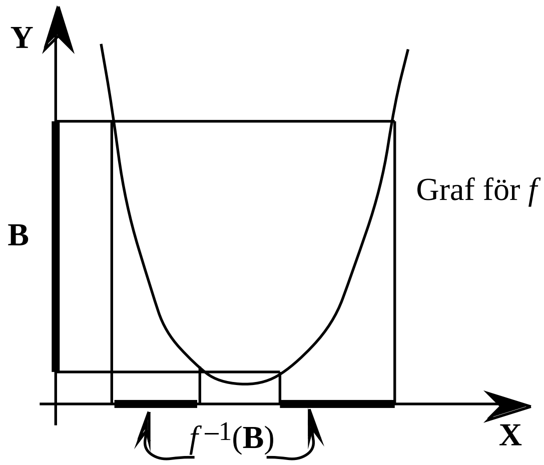
med $f(\mathbf{A})$. (”$f(\mathbf{A})$ är $\mathbf{A}$:s bild”).



Och analogt. om $\mathbf{B}$ $\mathbf{Y}$, så betecknas mängden

$$\{x \quad \mathbf{X};\ f(x) \quad \mathbf{B}\}$$

med $f^{-1}(\mathbf{B})$. (”$f^{-1}(\mathbf{B})$ är $\mathbf{B}$:s urbild”).



Observera att mängden $f^{-1}(\mathbf{B})$ *finns även i de fall då funktionen f saknar invers (dvs inte är någon injektion).*

Peanos axiomsystem för de naturliga talen

P1. Det finns ett naturligt tal 0.

P2. Varje naturligt tal n har en s.k. efterföljare n^+.

P3. Om $n^+ = m^+$ så är $n = m$.

P4. Inget naturligt tal har 0 som efterföljare.

P5. Om man vet om ett påstående om naturliga tal att

I. det är sant för talet 0 och

II. det är sant för n^+ om det är sant för n,

så är påståendet sant för alla naturliga tal.

(Induktionsaxiomet)

Definitioner och räkneregler för de naturliga talen N

Addition kan definieras via induktion utifrån

1. $n + 0 = n$ för alla n N. (D1+)
2. Om $n + m$ är definierat, så är $n + m^+$ definierat som $(n + m)^+$. (D2+)

Olikheter

$x \leq y \Leftrightarrow$ (DO ≤)
Det finns ett naturligt tal z
så att $x + z = y$.

$x < y \Leftrightarrow$ (DO <)
Det finns ett naturligt tal $z \neq 0$,
så att $x + z = y$.

Multiplikation kan definieras via induktion utifrån

1. $n \cdot 0 = 0$ för alla n N. (D1·)
2. Om $n \cdot m$ är definierat, så är $n \cdot m^+$ definierat som $(n \cdot m) + n$. (D2·)

Speciellt $n \cdot 0^+ = n \cdot 0 + n = 0 + n = n$.
(Vi brukar beteckna 0^+ med 1.)

Följande kan visas utifrån Peanos axiom och dessa definitioner:

Neutrala element

$$n + 0 = n \qquad n \cdot 1 = n \qquad \text{(Neu+, Neu·)}$$

Kommutativa lagar

$$n + m = m + n, \qquad n \cdot m = m \cdot n. \qquad \text{(Kom+, Kom·)}$$

Associativa lagar

$$(n + m) + p = n + (m + p), \qquad \text{(Ass+)}$$
$$(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p). \qquad \text{(Ass·)}$$

Distributiva lagen

$$(n + m)\cdot p = (n \cdot p) + (m \cdot p) \qquad \text{(Dist)}$$

Annuleringslagar

$n + m = n + p \qquad m = p.$ (Ann+)

Om $n \neq 0$: $n \cdot m = n \cdot p \qquad m = p.$ (Ann·)

Lagar om olikheter

För alla n och m gäller exakt en av relationerna $n < m$, $n = m$, $m < n$. (O1)

Om $n < m$ och $m < p$, så är $n < p$ (O2)

$n \leq m \qquad n + p \leq m + p.$ (O3+)

Om $p \neq 0$: $n < m \qquad n \cdot p < m \cdot p.$ (O3·)

Fler räknesätt:

Subtraktion (D)

”$m - n$” kan definieras om $n \leq m$::

Man visar först att: För $n \leq m$ **N**, så har ekvationen

$n + x = m$ precis en lösning x **N**

Denna lösning skrivs $x = m - n$**.**

Division „ $\frac{m}{n}$ „ (D/)

Man visar först att: För n och m **N**, $n \neq 0$, har ekvationen

$n \cdot x = m$ högst en lösning x **N**.

Denna lösning (om den finns) skrivs $x = \frac{m}{n}$.

Uppgifter:

AMII: K1. 6
Övningar på extrablad för lektion 3: 1 – 2, 6 – 7,

Dagens inlämningsuppgifter:

På utdelat blad för lekt 3, nr 2 och 7d. (För 7d får resultaten i uppgifterna 6 - 7c anses vara bevisade).