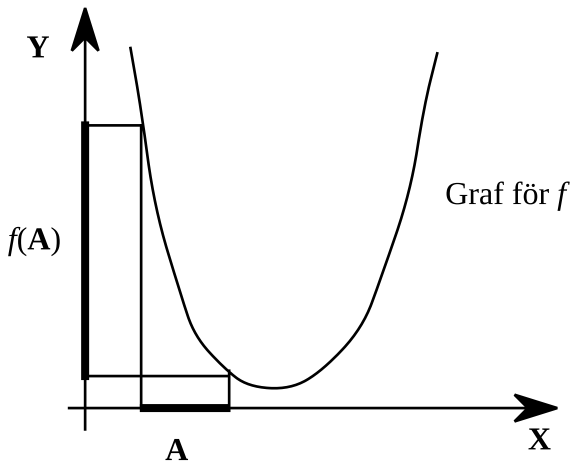
Mängdavbildningar

Om f är av typen $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ och $\mathbf{A}\quad\mathbf{X}$, så betecknas mängden

$$\{y \quad \mathbf{Y};\ y = f(x) \text{ för något } x \quad \mathbf{A}\}$$

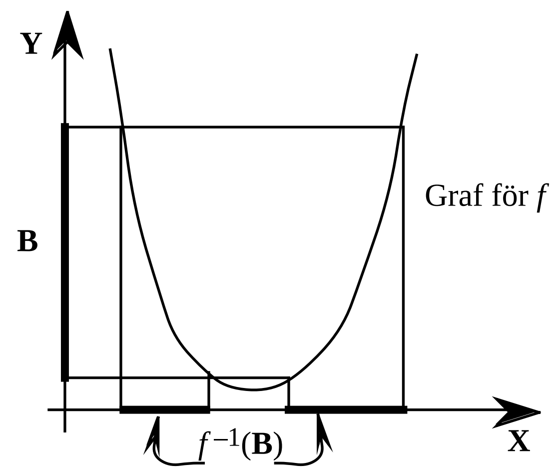
med $f(\mathbf{A})$. (”$f(\mathbf{A})$ är $\mathbf{A}$:s bild”).



Och analogt, om $\mathbf{B}\quad\mathbf{Y}$, så betecknas mängden

$$\{x \quad \mathbf{X};\ f(x) \quad \mathbf{B}\}$$

med $f^{-1}(\mathbf{B})$. (”$f^{-1}(\mathbf{B})$ är $\mathbf{B}$:s urbild”).



Observera att mängden $f^{-1}(\mathbf{B})$ *finns även i de fall då funktionen f saknar invers (dvs inte är någon injektion).*

Peanos axiomsystem för de naturliga talen

P1. Det finns ett naturligt tal 0.

P2. Varje naturligt tal n har en s.k. efterföljare n^+.

P3. Om $n^+ = m^+$ så är $n = m$.

P4. Inget naturligt tal har 0 som efterföljare.

P5. Om man vet om ett påstående om naturliga tal att
I. den är sann för talet 0 och
II. den är sann för n^+ om den är sann för n,
så är utsagan sann för alla naturliga tal.
(Induktionsaxiomet)

Definitioner och räkneregler för de naturliga talen N

Addition kan definieras via induktion utifrån

1. $n + 0 = n$ för alla $n \quad \mathbf{N}$. **(D1+)**
2. Om $n + m$ är definierat, så är $n + m^+$ definierat som $(n + m)^+$. **(D2+)**

Olikheter

Definitioner: $x \leq y \Leftrightarrow$ Det finns ett naturligt tal z så att $x + z = y$. **(DO≤)**
$x < y \Leftrightarrow$ Det finns ett naturligt tal $z \neq 0$ så att $x + z = y$. **(DO<)**

Multiplikation kan definieras via induktion utifrån

1. $n \cdot 0 = 0$ för alla $n \quad \mathbf{N}$. **(D1·)**
2. Om $n \cdot m$ är definierat så är $n \cdot m^+$ definierat som $(n \cdot m) + n$. **(D2·)**

Speciellt $n \cdot 0^+ = n + n \cdot 0 = n + 0 = n$. (Vi brukar beteckna 0^+ med 1.)

Följande kan visas utifrån Peanos axiom och dessa definitioner:

Neutrala element

$n + 0 = n$ $\qquad n \cdot 1 = n$ **(Neu+, Neu·)**

Kommutativa lagar

$n + m = m + n$, $\qquad n \cdot m = m \cdot n$. **(Kom+, Kom·)**

Associativa lagar

$(n + m) + p = n + (m + p)$, $\qquad (n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$. **(Ass+, Ass·)**

Distributiva lagen

$(n + m) \cdot p = (n \cdot p) + (m \cdot p)$ **(Dist)**

Annuleringslagar

$n + m = n + p \quad m = p$. $\qquad$ Om $n \neq 0$: $n \cdot m = n \cdot p \quad m = p$. **(Ann+, Ann·)**

Lagar om olikheter

För alla n och m gäller exakt en av relationerna $n < m$, $n = m$, $m < n$. **(O1)**
Om $n < m$ och $m < p$ så är $n < p$ **(O2)**
$n \leq m \quad n + p \leq m + p$. om $p \neq 0$: $n < m \quad n \cdot p < m \cdot p$. **(O3+, O3·)**

Fler räknesätt:

Subtraktion ”$m - n$” kan definieras om $n \leq m$: **(D–)**

Man visar först att: För $n \leq m \quad \mathbf{N}$ har ekvationen
$n + x = m$ precis en lösning $x \quad \mathbf{N}$

Denna lösning skrivs $x = m - n$.

Division ”$\frac{m}{n}$” **(D/)**

Man visar först att: För n och $m \quad \mathbf{N}$, $n \neq 0$, har ekvationen
$n \cdot x = m$ högst en lösning $x \quad \mathbf{N}$.

Denna lösning (om den finns) skrivs $x = \frac{m}{n}$.

Konstruktion av heltalen Z (AEE §2.1-2)

Grundidén är att våra ”intuitiva” heltal alltid kan fås som lösningar till ekvationer av typen

$$n + x = m, \text{ där } n \text{ och } m \text{ är tal } \quad \mathbf{N}.$$

Exempelvis är heltalet $x = -17$ lösning till ekvationen $18 + x = 1$, så talparet (18,1) i **N × N** karakteriserar det heltalet. Det finns förstås också andra sådana par som karakteriserar samma tal, exvis (20, 3) (eftersom 20 – 17 = 3). – alla par (n, m) **N × N** där $n + 1 = m + 18$ duger (och endast dessa).

Dessa iakttagelser ligger bakom följande definition av heltalen:

Ett heltal α är en mängd talpar **N × N** , sådana att

$$(n,m) \text{ och } (p, q) \quad \alpha \text{ om och endast om } n + q = m + p$$

Eller annorlunda uttryckt: Heltalen α utgör ekvivalensklasserna till ekvivalensrelationen R på **N × N**, definierad av

$$(n,m)R(p, q) \Leftrightarrow n + q = m + p$$

Mängden som paret (n,m) hör till (dvs motsvarande ekvivalensklass), skriver vi $[(n,m)]$.

Mängden av dessa s.k. heltal betecknas **Z**.

I **Z** definierar man sedan addition, multiplikation och olikhet enligt:

Om $\alpha = [(a, b)]$ och $\beta = [(c, d)]$, så är

$$\alpha + \beta = [(a + c, b + d)]$$
$$\alpha \cdot \beta = [(ad + bc, ac + bd)]$$
$$\alpha < \beta \Leftrightarrow b + d < a + c$$

(Man har då sneglat på att

α och β skall stå för lösningarna till $a + x = b$ och $c + y = d$

medan

α + β skall stå för lösningen $x + y$ till $(a + b) + (x + y) = (c + d)$,

α · β för lösningen $x \cdot y$ till $(ad + bc) + (x \cdot y) = (ac + bd)$

och att

$b - a < d - c \Leftrightarrow b + d < a + c$.)

En ”kopia” av de naturliga talen finns med i **Z**· n **N** svarar mot $[(0,n)]$ **Z**.

Om n **N** skriver vi $\alpha = n$ istället för $[(0,n)]$.

Man kan utifrån detta verifiera de ”vanliga” räknereglerna

Z1	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$	(**Neu+, Neu·**)
Z2	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$,	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.	(**Kom+, Kom·**)
Z3	$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$,	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.	(**Ass+, Ass·**)
Z4	$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$		(**Dist**)
Z5	$\alpha + \beta = \alpha + \gamma \quad \beta = \gamma$.	Om $\alpha \neq 0$: $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \quad \beta = \gamma$.	(**Ann+, Ann·**)
Z6	För alla α och β gäller exakt en av relationerna $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$.		(**O1**)
Z7	Om $\alpha < \beta$ och $\beta < \gamma$ så är $\alpha < \gamma$		(**O2**)
Z8	$\alpha \leq \beta \quad \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.	om $\gamma \neq 0$: $\alpha < \beta \quad \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.	(**O3+, O3·**)

Annuleringslagen för addition kan ersättas av

Z9 Till varje α **Z** finns ett ”motsatt tal” – α med egenskapen

$$\alpha + (-\alpha) = 0 \qquad \textbf{(Inv+)}$$

Övningar

Om mängdavbildningar:

Låt f vara av typen $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ samt
$\mathbf{A}, \mathbf{B} \quad \mathbf{X}$ resp $\mathbf{C}, \mathbf{D} \quad \mathbf{Y}$, visa att:

1. $f(\mathbf{A} \quad \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) \quad f(\mathbf{B})$.

2. a. $f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \quad f(\mathbf{A}) \cap f(\mathbf{B})$ och ge exempel där de båda leden inte är lika.

   b. Om f är en injektion, visa att de båda leden i föregående uppgift måste vara lika.

4. $f^{-1}(\mathbf{C} \quad \mathbf{D}) = f^{-1}(\mathbf{C}) \quad f^{-1}(\mathbf{D})$.

5. $f^{-1}(\mathbf{C} \cap \mathbf{D}) = f^{-1}(\mathbf{C}) \cap f^{-1}(\mathbf{D})$.

Om heltalsaritmetik:

6. Visa utifrån Peanos axiom att
   varje tal $n \quad \mathbf{N}$, $n \neq 0$, har en ”närmaste föregångare”, dvs $n = m^+$ för något $m \quad \mathbf{N}.$

7. Visa utifrån Peanos axiom och definitionen av addition
   a. att $0 + n = n$ för alla $n \quad \mathbf{N}$
   b. att $n + m^+ = n^+ + m$ för alla n och $m \quad \mathbf{N}$
   c. kommutativa lagen för addition, dvs att $n + m = m + n$ för alla n och $m \quad \mathbf{N}$
   d. associativa lagen för addition, dvs. att
   $(n + m) + p = n + (m + p)$, för alla n, m och $p \quad \mathbf{N}$
   e. Annuleringslagen för addition, dvs för alla x, y och $z \quad \mathbf{N}$ gäller att
   $x + z = y + z \qquad x = y$

8. Visa utifrån Peanos axiom och definitionen av multiplikation och resultaten från föregående uppgift
   a. att $n \cdot 0^+ = n$, för alla $n \quad \mathbf{N}$,
   b. och med hjälp av kommutativa och associativa lagarna för addition att
   $(n + m)\cdot p = (n \cdot p) + (m \cdot p)$

9. Visa utgående från Peanos axiom, definitionerna och räknelagarna för addition och multiplikation, samt definitionerna av subtraktion och division,
   a. $n - 0 = n$, för alla $n \quad \mathbf{N}$,
   b. $n + (m - p) = (n + m) - p$
   c. $n - (m - p) = (n - m) + p$
   d. $n - (m + p) = (n - m) - p$
   e. $\frac{0}{n} = 0$ för alla $n \quad \mathbf{N}$, $n \neq 0$ och $\frac{m}{0^+} = m$ för alla $m \quad \mathbf{N}$.
   f. $n\cdot\frac{m}{p} = \frac{(n\ m)}{p}$
   g. $\frac{n}{m} + \frac{p}{d} = \frac{((n\cdot d) + (m\cdot p))}{(m\cdot d)}$

10. Om α och $\beta \quad \mathrm{Z}$. Visa utgående från räknelagarna för $\mathbf{Z}$ (**Z1-9**) att
    a. Om $\alpha = [(n, m)] \quad n, m \quad \mathbf{N}$, så är $-\alpha = [(m, n)]$.
    b. $(-1)\cdot\alpha = -\alpha$
    c. Låt subtraktion i $\mathbf{Z}$ *definieras* av $\alpha \triangleq \beta = \alpha + (-\beta)$. Visa att detta, för de tal i $\mathbf{Z}$ som svarar mot de naturliga talen $\mathbf{N}$, överensstämmer med den subtraktion (**D–**) som användes i $\mathbf{N}$.