Konstruktion av de rationella talen Q (AEE §2.3)

Grundidén är att våra ”intuitiva” rationella tal (bråk) alltid kan fås som lösningar till ekvationer av typen

$$\alpha \cdot \xi = \beta, \text{ där } \alpha \text{ och } \beta \text{ är tal } \quad \mathbf{Z} \text{ och } \alpha \neq 0.$$

Exempelvis är bråket $\xi = \frac{3}{5}$ lösning till ekvationen $5\,\xi = 3$, så talparet (3, 5) i $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ karakteriserar detta rationella tal. Det finns förstås också andra sådana par som karakteriserar samma tal, exempelvis (–6, –10) (eftersom $-10 \cdot \frac{3}{5} = -6$). Alla par (α, β) $\quad \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $\alpha \neq 0$ där $5 \cdot \alpha = 3 \cdot \beta$ duger (och endast dessa).

Dessa iakttagelser ligger bakom följande definition av de rationella talen:

Ett rationellt tal A är en mängd talpar $\quad \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, sådana att

$$(\alpha,\beta) \text{ och } (\gamma, \delta) \quad A \text{ om och endast om } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma.$$

Detta är en ekvivalensrelation. Mängden som paret (α,β) hör till, skriver vi $[(\alpha,\beta)]$.

Mängden av dessa s.k. rationella tal betecknas **Q**.

I **Q** definierar man sedan addition, multiplikation och olikhet enligt:
Om $A = [(\alpha, \beta)]$ och $B = [(\gamma, \delta)]$, så är

$$A + B = [(\alpha\delta + \beta\gamma, \beta\delta)]$$
$$A \cdot B = [(\alpha\gamma, \beta\delta)]$$
$$A < B \Leftrightarrow \alpha\delta < \beta\gamma \text{ om } \beta\delta > 0$$

(Man har då sneglat på att

A och B skall stå för lösningarna till $\beta \cdot \xi = \alpha$ och $\delta \cdot \eta = \gamma$

medan

$A + B$ skall stå för lösningen $\xi + \eta$ till $\beta\delta\,(\xi + \eta) = \alpha\delta + \beta\gamma$,

$A \cdot B$ skall stå för lösningen $\xi \cdot \eta$ till $(\beta\delta) \cdot (\xi \cdot \eta) = \alpha\gamma$,

och att

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta < \beta\gamma \text{ om } \beta\delta > 0.)$$

Observera också att tecknen +, · , < betyder olika saker i definitionernas vänster- resp. högerled. På höger sida handlar det om addition, mutiplikation och olikhet mellan heltal – alltså något som redan är definierat – medan det på vänster sida är fråga om den addition, multiplikation resp. olikhetsrelation som skall definieras för de rationella talen.

En ”kopia” av de hela talen **Z** finns med i **Q**. α $\quad \mathbf{Z}$ svarar mot $[(1,\alpha)]$ $\quad \mathbf{Q}$.
Om α $\quad \mathbf{Z}$ skriver vi $A = \alpha$ istället för $A = [(1,\alpha)]$.

Man kan utifrån detta verifiera de ”vanliga” räknereglerna:

Q1 $A + 0 = A$ $\qquad$ $A \cdot 1 = A$ **(Neu+, Neu·)**

Q2 $A + B = B + A$, $\qquad$ $A \cdot B = B \cdot A$. (**Kom+, Kom·**)

Q3 $(A + B) + C = A + (B + C)$, $\qquad$ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$. (**Ass+, Ass·**)

Q4 $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$ (**Dist**)

Q5 $A + B = A + C \quad B = C$. Om $A \neq 0$: $A \cdot B = A \cdot C \quad B = C$. (**Ann+, Ann·**)

Q6 För alla A och B gäller exakt en av relationerna $A < B$, $A = B$, $B < A$. (**O1**)

Q7 Om $A < B$ och $B < C$ så är $A < C$ (**O2**)

Q8 $A \leq B \quad A + C \leq B + C$. om $C \neq 0$: $A < B \quad A \cdot C < B \cdot C$. (**O3+, O3·**)

Q9+ Till varje A **Q** finns ett ”motsatt tal”: $-A$ med egenskapen

$$A + (-A) = 0$$ (**Inv+**)

och
Q9· Till varje A **Q,** $A \neq 0$ finns ett ”inverst tal” A^{-1} med egenskapen

$$A \cdot A^{-1} = 1$$ (**Inv·**)

Notera att annuleringslagarna **Q5** är konsekvenser av **Q1**, **Q2**, **Q3** och **Q9**.

Begreppet *kropp*

Mängder **M** som åtminstone innehåller två element (här betecknade 0 och 1) och är försedda med två ”räknesätt” – vi kallar dem addition (betecknad +) och multiplikation (betecknad ·), för vilka gäller att

K1 $A + 0 = A$ $\quad$ $A \cdot 1 = A$ **(Neu+, Neu·)**

K2 $A + B = B + A$, $\quad$ $A \cdot B = B \cdot A$. (**Kom+, Kom·**)

K3 $(A + B) + C = A + (B + C)$, $\quad$ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$. (**Ass+, Ass·**)

K4 $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$ (**Dist**)

K9+ Till varje A **M** finns ett ”motsatt tal” $-A$ med egenskapen

$$A + (-A) = 0$$ (**Inv+**)

K9· Till varje A **M**, $A \neq 0$, finns ett ”inverst tal” A^{-1} med egenskapen

$$A \cdot A^{-1} = 1$$ (**Inv·**)

kallas en *kropp*.

Om dessutom en relation ”<” (olikhet) är definierad så att

K6 För alla A och B gäller exakt en av relationerna $A < B$, $A = B$, $B < A$. (**O1**)

K7 Om $A < B$ och $B < C$ så är $A < C$ (**O2**)

K8 $A < B \quad A + C < B + C$ och, om $C > 0$: $A < B \quad A \cdot C < B \cdot C$. (**O3+, O3·**)

så säger man att **M** är en *ordnad kropp.*

Inom kropparna kan man bedriva *aritmetik* dvs räkning med de fyra räknesätten. +, –, · och /.

Q är alltså ett exempel på en ordnad kropp.
Andra exempel på kroppar: **R**, (de reella talen) **C** (de komplexa talen), $\mathbf{Z}_p$ (räkning mod p, där p är ett primtal).

Konstruktion av de reella talen R. (AEE §4.3)

Informellt:

De rationella talen **Q** kan geometriskt åskådliggöras som punkter på en talllinje. Geometriskt sett finns det dock fler punkter på linjen än dessa rationella. Exvis, om man från 0 avsätter en sträcka lika lång som diagonalen i en kvadrat med sidan 1, så kommer sträckans andra ändpunkt inte att vara en rationell punkt. En idé om hur man kan fånga in dessa ”hål” som tal i ett mera omfattande talsystem går som följer:

Vi föreställer oss att varje punkt på tallinjen (rationell eller ej) delar de *rationella* punkterna i två delar – de som ”är mindre än” (”ligger till vänster om”) hålet och de övriga. Denna ”vänstermängd” – vi kallar den a har tydligen följande egenskaper

1. a **Q** och $a \neq$ **Q**, $a \neq$ (Obs *delmängd* av **Q**, inte element i **Q**!)
2. A a, B **Q** och $B <$ A B a
3. Det finns inget största element i a, dvs:
   Om A a så finns säkert (åtminstone) ett C a så att $A < C$.
   (Informellt: Mängden skall motsvara ett öppet intervall på reella tallinjen – ”högerändpunkten” skall inte räknas med och någon ”vänsterändpunkt” finns inte.)

En sådan mängd a kallar vi ett *snitt*.

Mot varje punkt på vår tänkta tallinjen svarar alltså ett snitt. Omvänt föreställer vi oss att varje snitt svarar mot en (och endast en) punkt på tallinjen (snittets ”högerändpunkt”). Speciellt svarar mängden av de snitt vars ”högerändpunkt” är ett rationellt tal, mängden **Q**.

Formellt går man nu tillväga på följande vis:

De reella talen förklaras vara identiska med snitten i kropppen **Q**
De rationella talen svarar då mot de snitt vars komplement **Q** – a har ett minsta element (nämligen det rationella talet ifråga).

Ordning, addition och multiplikation definieras sedan, som också beskrivet i AEE (Def 5.1.1, 5.1.3, 5.1.8) på följande vis:

Definition av *ordning*:

$a \leq b \Leftrightarrow$ snittet a snittet b.
$a < b \Leftrightarrow a \leq b$ och $a \neq b$,

Definition av *motsatt* reellt tal: För de snitt a som motsvarar rationella tal P, a ={B **Q**, $B <$ A **Q**} är det motsatta reella talet – a, snittet {B **Q**, $B <$ – A **Q**}. För de snitt a som inte motsvarar rationella tal är det motsatta reella talet snittet {B **Q**; – B a}.

Angående *addition*:
Om a och b är två snitt så är mängden c ={ C **Q**; $C = A + B$ för några A a och B b} också ett snitt. Detta snitt tas som definition av $a + b$.

Angående *multiplikation*:
Om a och b är två snitt ≥ 0 så är mängden c = {C **Q**; $C < A \cdot B$ för några $A \geq 0$ och $a > 0$, $B \geq 0$ och b} också ett snitt. För sådana a och b definieras $a \cdot b$ som detta snitt c.
För övriga a och b, definieras $a \cdot b$ av $|a| \cdot |b|$ om både a och $b < 0$ och av – $|a| \cdot |b|$ om precis ett av a och $b < 0$. ($|a|$ betyder som vanligt, a om $a \geq 0$ och – a om $a < 0$.)

Kroppen **R** är ordnad och förutom kroppräknelagarna tillkommer också

- *Supremumegenskapen*:

  Om **M** är en mängd reella tal och B är ett tal > alla i **M**, (dvs om **M** är *uppåt begränsad*)

  så finns det ett minsta reellt tal C, som är ≥ alla i **M**,

  dvs det finns ett tal C sådant att
  - ° $d \leq C$ för alla d **M**,
  - ° om $e < C$ så finns ett d **M** så att $e < d \leq C$..

  Talet C kallas *supremum av mängden* **M**. C = sup **M**.

Motsvarande gäller också med omvända olikheter. Då är det fråga om *nedåt bgränsade* mängder. Den största undre begränsningen D benämns *infimum av mängden*, D = inf **M**.

Och en egenskap som brukar kallas

- *Archimedes axiom*:

  Om a och $b > 0$, så finns ett tal c så att $ca > b$.

Archimedes axiom är en formalisering av den intuitiva föreställningen att det inte finns några ”oändlig stora” eller ”oändligt små” element i **R**.

Supremumegenskapen kan visas vara ekvivalent med den Archimedes axiom och den s.k. *intervallinkapslingsegenskapen*:

Om $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots\ldots \leq a_n \leq \ldots\ldots \leq b_n \leq \ldots\ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$
så finns det (minst) ett reellt tal x sådant att

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots\ldots \leq a_n \leq \ldots \leq x \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots\ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$

(Dvs om intervallen $[a_n, b_n]$ är inkapslade i varandra: $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ $[a_n, b_n]$,

så det finns ett reellt tal x som ligger i alla intervallen.)

Relationer (AEE §1.2, 1.3)

Definition: En *relation* **G** i mängden **M** är detsamma som en delmängd av **M** × **M**.

I stället för (a, b) **G** skriver man gärna a **G** b

Exempel på viktiga relationer:

1a. På **R** (även **N**, **Z**, **Q**):

Olikhet, $a < b$ kan uppfattas som en relation i ovanstående mening.

Mängden **G** består av de par (a, b) **R** × **R** för vilka $a < b$. **G** kan lämpligen betecknas med < och i och för sig skulle man kunna skriva (a,b) < i stället för $a < b$ – men det gör man inte så gärna!

1b. På motsvarande sätt kan den ostränga olikheten $a \leq b$ uppfattas som en sådan relation.

För dessa relationer gäller

a **G** b och b **G** c a **G** c (*Transitivitet*)

För den stränga olikheten < gäller dessutom att

högst en av a **G** b, $a = b$ och b **G** a är riktig.

Relationer av detta slag kallas *ordningsrelationer* och mängden **M** sägs vara *partiellt ordnad*.

Om sedan alltid någon av a **G** b, $a = b$ och b **G** a är riktig så säger man att **M** är *totalordnad*.

2. På **N** (även **Z**)

”Gå jämt upp i”

Mängden **G** består då av de (a, b) **N** × **N** för vilka ekvationen $a \cdot x = b$ har en lösning (i **N**). En vanlig beteckning för denna relation är $a|b$.

3. På **M** (vilken mängd som helst):

Identitet $a = b$.

Mängden **G** består då av de par (a, b) **M** × **M** för vilka $a = b$.

4a. På **N** (även **Z**)

”Ha samma paritet som”.

Mängden **G** består då av de (a, b) **N** × **N** som antingen båda är jämna eller båda ä udda, (dvs de par (a, b) som har samma rest när man delar dem med 2).

4b. Mera generellt

”Tillhör samma restklass mudulo n” (n heltal ≥ 2)

Mängden **G** består då av de (a, b) **N** × **N** som har samma rest när man delar dem med n.

För relationerna i exemplen nr 3 och 4 gäller:

a **G** a (*Reflexivitet*)

a **G** b ⇔ b **G** a (*Symmetri*)

och transitivitet:

a **G** b och b **G** c a **G** c

Relationer som uppfyller dessa tre lagar kallas *ekvivalensrelationer*. Sådana relationer skapas naturligt när man har att göra med ting som visserligen inte är identiska men ändå är lika i något avseende. (Ex i vardagslivet: … ha samma färg som …, … ha samma pappa som …, … ha samma pris som …, m.m., m.m.)

En mycket generell konstruktion inom mängdläran som leder till ekvivalensrelationer är som följer: Låt **M** vara någon mängd som är uppdelad i ett antal (kan vara oändligt) disjunkta delar $\mathbf{M}_i$, $i \quad \mathbf{I}$,

$$\mathbf{M} = \ _{i \quad \mathbf{I}} \mathbf{M}_i \ _{och} \ \mathbf{M}_i \ \cap \ \mathbf{M}_j = \quad , \text{ för alla } i \text{ och } j \quad \mathbf{I}\,,\ i \neq j,$$

i så fall är realtionen a **G** b: ”a och b tillhör samma delmängd $\mathbf{M}_i$ ” en ekvivalensrelation.

Funktioner

Definition av begreppet

Definition: Låt **X** och **Y** vara två mängder. En *funktion f* av *typ* **X** → **Y** är detsamma som en delmängd av **X** × **Y**, sådan att

1. Om (x, y) och $(x, z) \quad f$, så är $y = z$

[2. Om $x \quad$ **X** så finns något $y \quad$ **Y** sådant att $(x, y) \quad f$.]

Mängden f kallas vanligtvis funktionens *graf* och man föredrar att skriva

$y = f(x)$ i stället för $(x, y) \quad f$

De x som förekommer som förstaelement i grafen (om punkten 2 tas med i definitionen ovan, så blir det hea **X**) är funktionens *definitionsmängd* $\mathbf{D}_f$ och de y som kan uppträda som andraelement i grafen, dvs. $\{y \quad \mathbf{Y};\ y = f(x)$ för något $x \quad \mathbf{X}\}$ är funktionens *värdemängd* $\mathbf{V}_f$.

Några synonymer

Svenska	Engelska
Funktion avbildning, tillordning	*Function, mapping*
Definitionsmängd, urbild, domän	*Domain*
Värdemängd, bild	*Range, image*

Mera beteckningkonventioner och terminologi

”f är en funktion av *typ* **X** → **Y**” förkortas till ”f : **X** → **Y**”

Om **M** $\quad$ **X**: $f(\mathbf{M}) = \{y \quad \mathbf{Y};\ y = f(x)$ för något $x \quad \mathbf{M}\}$

Om **M** $\quad$ **Y**: $f^{-1}(\mathbf{M}) = \{x \quad \mathbf{X};\ y = f(x)$ för något $y \quad \mathbf{M}\}$

Om f är sådan att $f(x) = f(z)$ endast om $x = z$ så säger man att f är *inverterbar* (eller är en *injektion*)

För inverterbara funktioner gäller att

$\{(y, x) \quad \mathbf{Y} \times \mathbf{X};\ y = f(x)\}$ är en funktion av typ $\mathbf{V}_f \to \mathbf{X}$. Denna s.k. inversfunktion skrivs f^{-1}.

Om $\mathbf{V}_f = \mathbf{Y}$ så säger man att funktionen avbildar *på* **Y** (eller är en *surjektion*).

Om f både är inverterbar och på (både är en injektion och en surjektion) så sägs den vara en *bijektion*.

Sammansättning

Om f : **X** → **Y** och g: **Y** → **Z**, så finns det ett naturligt sätt att kombinera dessa till en funktion g: **X** → **Z**, nämligen

$h(x) = g(f(x))$.

Denna *sammansättning* betecknas $f \circ g$.

Observera att sammansättning av två funktioner bara kan göras om typerna är passande, nämligen att f:s värdemängd måste ligga i g:s definitionsmängd. Exempelvis är sammansättning alltid möjligt för det fall att **X** = **Y** = **Z**.

Sammansättningsoperationen uppfyller alltid den associativa lagen

$$f \circ (g \circ h) \ = \ (f \circ g) \circ h$$

Däremot gäller i allmänhet inte den kommutativa lagen (se övning 7 nedan).

Bland funktionerna av typen **X** → **X** utmärker sig en som är speciellt ”enkel”, den s.k. *identiteten*:

$i_{\mathbf{X}}(x) = x$

Dess graf $\{(x, x);\ x \quad \mathbf{X}\}$, är ”diagonalen” i **X** × **X**.

Övningar

Om relationer

1. Verifiera att relationen i exempel nr 2 ovan är en ordningsrelation. Är **N** därigenom totalordnad? Finns det något tal i **N** som är "mindre än" alla andra (dvs. ett $n \in \mathbf{N}$ för vilket $n|a$ för alla $a \in \mathbf{N}$? Finns det något tal i **N** som är "större än" alla andra (dvs. ett $m \in \mathbf{N}$ för vilket $a|m$ för alla $a \in \mathbf{N}$?

2. Är relationen "vara (hel)syskon till" symmetrisk? reflexiv? transitiv?
Hur blir det för relationerna "ha samma biologiska föräldrar" resp. "vara kusin till"?

Om funktioner

3. Vilka är funktionerna av typ $\{1,2,3\} \to \{0,1\}$, definierade på $\{1, 2, 3\}$?

4. Om **Y** består av två element och **X** en mängd (vilken som helst), försök beskriva vilka funktionerna av typen $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, definierade på **X**; är med hjälp av begreppet delmängd.

5. Finns det några funktioner av typ $\emptyset \to \mathbf{R}$ resp. $\mathbf{R} \to \emptyset$?

6. Verifiera den associativa lagen för sammansättningsoperationen.

7. Om f och g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$ och $g(x) = x^2$. Vilka är då $(f \circ g)(x)$ och $(g \circ f)(x)$.

8. Verifiera att om $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ så är $f \circ i_\mathbf{X} = f$ och $i_\mathbf{Y} \circ f = f$.

9 Verifiera att om $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ är bijektion (definierad på **X**), så är $f^{-1} \circ f = i_\mathbf{X}$ och $f \circ f^{-1} = i_\mathbf{Y}$.
Och omvänt: Om $g \circ f = i_\mathbf{X}$ och $f \circ h = i_\mathbf{Y}$ för några funktioner g och h, så är f en bijektion och $g = h = f^{-1}$.

Om reella tal

10 - 13: AEE Övn 5.1 – 5.4. *I ledningen till 5.4 skall stå*: … tag $r = p + (2 - p^2)/(p + \mathbf{2})$.

14.. *Beloppet* (*absolutvärdet*), $|x|$, av det reella talet x definieras som bekant av
$$|x| = x \text{ om } x > 0 \text{ och } = -x \text{ om } x < 0.$$
Visa utgående från de reella talens räkneregler, att om $a < x < b$ och $a < y < b$, så är
$$|x - y| < b - a.$$

15. Visa att för alla z och $y \in \mathbf{R}$ så är
$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$
och
$$\min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2},$$
(max **M** betecknar det största talet i mängden **M** – förutsatt att det finns ett sådant tal. Motsvarande för minsta tal).

16. En delmängd **M** av **R** är *uppåt begränsad* om det finns något tal $B \in \mathbf{R}$ så att för varje $x \in \mathbf{M}$ gäller att $x < B$. På motsvarande sätt definieras *nedåt begränsade* mängder.
Hur är det med den tomma mängden $\emptyset$? Är den uppåt och/eller nedåt begränsad?

17 Vad är det för skillnad på begreppen sup **M** resp. max **M**?

18. Bestäm utgående från begreppens definitioner och de reella talens räkneregler sup **M** och inf **M** resp max **M** och min **M** i fallen

   a. $\mathbf{M} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots ; \frac{1}{n}, \ldots\}$.

   b. $\mathbf{M} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{13}{27}, \ldots, \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n}, \ldots\right\}$. ($3^n$ står förstås för produkten av n st 3:or.)

   c. $\mathbf{M} = \{\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \ldots\ldots\}$.
   ($\sqrt{a}$ står förstås för det positiva tal vars kvadrat $= a$.)
   Ledning: Obs att följden av tal ges av $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.
   Visa att $\sqrt{2} \le x_n < x_{n+1}$ och ex:vis att $0 < 2 - x_n < \frac{2}{n}$. .

Dagens uppgifter : 5 och 18b.