

(Reella) linjära rum

En mängd \mathbf{L} försedd med två ”räknesätt”

- addition (betecknad $+$) $\mathbf{L} \times \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$
- multiplikation med skalär (betecknad \cdot), $\mathbf{R} \times \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$

för vilka lagarna **L1 - L8** nedan gäller kallas ett *linjärt rum*¹.

Här betecknar vi elementen i \mathbf{L} (*vektorerna*) med kursiva, feta latinska gemener $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \dots$ och de reella talen (*skalärerna*) med grekiska gemener $\alpha, \beta, \dots, \mu \dots$, såvida de inte är explicita decimalbråk eller rationella tal:

- | | | | |
|-----------|---|-----------|--|
| L1 | $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, | L5 | $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$, |
| L2 | $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, | L6 | $(\mu) \cdot \mathbf{a} = \mu \cdot (\mathbf{a})$, |
| L3 | Det finns en ”nollvektor” $\mathbf{0}$
sådan att $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ för varje \mathbf{a} | L7 | $(\alpha + \mu) \cdot \mathbf{a} = (\alpha \cdot \mathbf{a}) + (\mu \cdot \mathbf{a})$, |
| L4 | Till varje vektor \mathbf{a} finns en ”motsatt”
vektor $-\mathbf{a}$ sådan att $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, | L8 | $\alpha \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\alpha \cdot \mathbf{a}) + (\alpha \cdot \mathbf{b})$. |

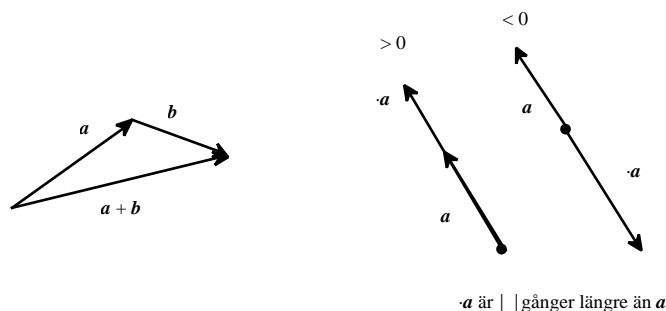
Vi betecknar ett sådant linjärt rum $(\mathbf{L}, \mathbf{R}, +, \cdot)$

Notera att $(\mathbf{L}, +, \cdot)$ är en abelsk grupp

Några välkända exempel på linjära rum:

1. Låt vektorerna vara $\mathbf{L} = \mathbf{R}^2$ (dvs paren av reella tal) med
 addition: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
 multiplikation med skalär: $\alpha \cdot (x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2)$
2. Motsvarande i \mathbf{R}^n
3. Låt \mathbf{L} vara mängden av pilar i planet, där vi betraktar två sådana om lika om de har samma längd och är lika riktade (egentligen är elementen i \mathbf{L} då *ekvivalensklasser* pilar) med

addition och multiplikation med skalär definierade enligt figurerna:



4. Motsvarande för pilar i vår ”vanliga” 3-dimensionella rymd.

5. Låt \mathbf{L} vara mängden av alla funktioner $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ med

addition $(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$ och
 multiplikation med skalär: $(\alpha \cdot f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cdot f(x)$

¹ Mera precist: *Linjära rum över kroppen* \mathbf{R} . Mera allmänt kan man ersätta \mathbf{R} med vilken somhelst kropp \mathbf{K} – får då linjära rum *över* \mathbf{K} .

Linjära kombinationer, linjärt (o)beroende. Dimension

Man säger att en vektor \mathbf{a} är en *linjär kombination* av vektorerna $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ om

$$\mathbf{a} = \alpha_0 \mathbf{b}_0 + \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{b}_k.$$

Vidare: En mängd \mathbf{M} av vektorer sägs vara *linjärt oberoende* om ingen av vektorerna är en linjär kombination av de övriga i \mathbf{M} . Det maximala antalet linjärt oberoende vektorer i \mathbf{L} kallas rummets *dimension*. (Om denna inte är ett naturligt tal så säger vi att dimensionen är oändlig.)

Satser och observationer:

1. En mängd \mathbf{M} av vektorer är linjärt oberoende om och endast om för godtyckliga vektorer $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{M}, k \in \mathbf{N}$
$$\alpha_0 \mathbf{v}_0 + \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$
 endast om $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$
2. Om n st vektorer $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ är linjära kombinationer av $m - 1$ st vektorer $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-1}$ och $n > m$, så är vektorerna $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ linjärt beroende.
3. Om rummets dimension är ändligt, n , så har alla maximala linjärt oberoende mängder n element. (Sådana vektorer utgör *baser* i det linjära rummet.)
4. För varje vektor \mathbf{v} i ett ändligdimensionellt rum och varje bas $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ i rummet, så är \mathbf{v} på ett och endast ett sätt en linjär kombination av baselementen:

$$\mathbf{v} = \alpha_0 \mathbf{e}_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{e}_{n-1}$$

Uppsättningen $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$ utgör då *vektorns koordinater* med avseende på basen ifråga.

Isomorfier

Två linjära rum $(\mathbf{L}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ och $(\mathbf{M}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är *isomorfa* ("i allt väsentligt lika") om det finns en bijektion $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{M}$ sådan att

- I. $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$ och
- II. $f(\alpha \cdot \mathbf{a}) = \alpha \cdot f(\mathbf{a})$. (2)

Sats: Alla n -dimensionella vektorrum (och hit hör vektorrummet \mathbf{R}^n) är sinsemellan isomorfa.

Det finns alltså väsentligen bara en sorts n -dimensionella vektorrum.

² Bijektionen är "kompatibel" med räknesätten. På motsvarande sätt definierar man isomorfi mellan andra algebraiska strukturer (grupper, ringar, kroppar.....).

Övningar:

- L1. Skriv upp definitioner för $+$ och \cdot , så att $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum. (n står för något heltal ≥ 2 .)
- L2. Verifiera att $(\mathbf{R}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum om $+$ och \cdot står för den vanliga additionen och multiplikationen.
- L3. Verifiera att $(\{0\}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum om $+$ och \cdot står för den vanliga additionen och multiplikationen. (Detta "triviala" rum kallas *nollrummet*.)
- L4. Verifiera att rummet beskrivet i ex 5 ovan är linjärt.
- L5. Låt \mathbf{P} vara mängden av alla polynom $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Verifiera att $(\mathbf{P}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum om $+$ och \cdot definieras som i exempel 5 ovan.
- L6. Samma som föregående uppgift fast med följande delmängder av \mathbf{P}
- {polynomen av grad $\leq n$ }, där n något naturligt tal.
 - {polynomen av grad $= n$ }, där n något naturligt tal.
 - {alla polynom p för vilka $p(1) = 0$ }
 - {alla polynom p för vilka $p(0) = 1$ }
 - {alla polynom p för vilka $p'(2) = 0$, där p' är p 's derivata
- L7. Låt $(\mathbf{L}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ vara något linjärt rum och låt $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{L}$. Visa att $(\mathbf{M}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum om och endast om följande båda villkor är uppfyllda:
- $a \in \mathbf{M}$ och $b \in \mathbf{M} \Rightarrow a + b \in \mathbf{M}$,
 - $a \in \mathbf{M}$ och $\lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda a \in \mathbf{M}$.
- L8. Verifiera att alla vektorer i ett rum av dimension 1 kan skrivas på formen λe där e är en på förhand vald vektor $\neq \mathbf{0}$.
- L9. Vilka är dimensionerna på de linjära rummen i uppgifterna L1 - L6?
- L10 (Ett underligt vektorrum)
Låt \mathbf{R}_+ = de positiva reella talen och definiera två räknesätt $+$ och \cdot :
 $a + b = ab$ (där a och $b \in \mathbf{R}_+$),
 $a \cdot a = a$ (där $a \in \mathbf{R}$ och $a \in \mathbf{R}_+$)
Verifiera att $(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum och att dess dimension = 1.
- L11. Visa att alla vektorer i ett linjärt rum av dimension 1 är isomorfa. Ange någon isomorfi Det linjära rummet mellan $(\mathbf{R}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ och det linjära rummet $(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}, +, \cdot)$ i uppg L10.
- Mera allmänt gäller att alla rum med samma dimension n ($n \in \mathbf{N}$) är isomorfa.
- L12. Ange någon bijektion mellan de linjära rummen i L2 och L10, kompatibel med räknesätten.
- L13. Ange någon bijektion mellan de linjära rummen i exempel 1 och 3 ovan
- Dagens uppgifter: L6; L9 (beträffande rummen i L6).