Lösningsskisser till tentamen SF2710, den 5 juni 2008

(1.) a) $\begin{cases} vx + uy = p \in \mathbb{Q} \\ ux + vy = q \in \mathbb{Q} \end{cases} \iff \left[\text{Lös ut } x \text{ och } y\right] \iff \begin{cases} (v^2-u^2)x = vp - uq \\ (v^2-u^2)y = uq - vp \end{cases} \overset{u^2 \neq v^2}{\iff}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{vp-uq}{v^2-u^2} \in \mathbb{Q} \\ y = \dfrac{uq-vp}{v^2-u^2} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$ eftersom u, v, p och $q \in \mathbb{Q}$. V.S.B.

b) Om t.ex. $u = v = 1$ och $x = -y = \sqrt{2}$, så är

$vx + uy = ux + vy = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$, men $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Svar b: x och y måste inte vara rationella

(2) a) Falskt. Motexempel: Konstant funktion.
(Icke-konstanta kontinuerliga funktioners värdemängd är dock, enl. satsen om mellanvärden, alltid intervall.)

b) Falskt. Motexempel: $f(x) = x$, $0 < x \leq 1$ är kontinuerlig och dess värdemängd är $0 < y \leq 1$, som inte är sluten.

c) Sant. Enligt def av begreppet "likformig kontinuitet på en mängd M", så medför "f likformigt kont på M" att också "f är likformigt kontinuerlig på varje delmängd P av M".
Vidare vet vi enligt kontinuitetssatserna att varje kontinuerlig funktion def. på en sluten, begränsad mängd också är likformigt kontinuerlig i den mängden. I vårt fall vet vi att $f(x)$ är kontinuerlig (bl.a.) på det slutna och begränsade intervallet $10^{-10} \leq x \leq 1$, varför f är likf. kont. där. Men intervallet $10^{-10} < x \leq 1$ är en del av intervallet $10^{-10} \leq x \leq 1$, så f är också likf. kont. i detta mindre intervall.

(3) a] Vi har att $\arctan t \to \begin{cases} \pi/2 & \text{om } t \to \infty, \\ -\pi/2 & \text{om } t \to -\infty, \end{cases}$

dvs. $(\arctan t)^2 \to \frac{\pi^2}{4}$ om $t \to \pm\infty$,

varav $\lim_{n\to\infty} (\arctan nx)^2 = \begin{cases} \pi^2/4, & \text{om } x \neq 0, \\ 0, & \text{om } x = 0. \end{cases}$

Svar a: $f(x) = \begin{cases} \pi^2/4, & \text{om } x \neq 0, \\ 0, & \text{om } x = 0. \end{cases}$

b] Fallet $I_1 = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 1\}$:

Vi har att $\sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq 1} \left(\frac{\pi^2}{4} - (\arctan nx)^2 \right) =$

$= \left[\begin{array}{l} \arctan nx \text{ är växande} \\ \text{i intervallet, så supremet} \\ \text{är ett maximum som antas} \\ \text{då } x \text{ är så litet som möjligt,} \\ \text{dvs då } x = 1 \end{array} \right] = \frac{\pi^2}{4} - (\arctan n)^2 \to 0$ då $n \to \infty$

Konvergensen är alltså likformig.

Fallet $I_2 = \{ x \in \mathbb{R};\ x \geq -1 \}$

Generellt vet man att om f_n är kontinuerliga och $f_n \to f$ likformigt i ett intervall så är också f kontinuerlig. I vårt fall är $f(x)$ diskontinuerlig för $x = 0 \in I_2$. Konvergensen är alltså inte likformig.

[Alternativt kan man använda sig direkt av def av begreppet "likformig konvergens":

$M(n) = \sup_{x \geq -1} |f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{x\to 0} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\pi^2}{4} - \arctan nx\right) =$

$= \frac{\pi^2}{4}$ för alla n $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} M(n) \not\to 0$, dvs. konvergensen är inte likformig.

Svar b: Likformigt i I_1 men inte i I_2

(4.) Varje heltal $n \equiv r \pmod{}$, där r är något av heltalen 0 – 9, och detta tal är den "sista siffran" i representationen av talet i basen 10. Varje heltalskvadrat har alltså formen $n^2 \equiv r^2 \pmod{10}$. För de möjliga värdena på r gäller:

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$r^2 \pmod{10}$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Talen 2, 3, 7 och 8 saknas i den nedersta raden, ingen jämn kvadrat kan alltså ha dessa tal som sista siffra.

V.S.B.

---

(5) a.) För $c > 0$ och $x \neq 0$ har vi:

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = |x|^c \cdot \underbrace{\left|\sin\frac{1}{x^2}\right|}_{\leq 1} \leq |x|^c \to 0 \text{ då } x \to 0$$

dvs. $f(x)$ är kontinuerlig för $x = 0$ om $c > 0$

För $c \leq 0$ kan vi betrakta t.ex. talföljden $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}}$.

För denna gäller att $x_n \to 0$ då $n \to \infty$

och att $f(x_n) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-c/2} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}_{=1} = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{\overbrace{-c}^{\geq 0}} \not\to 0 = f(0)$ då $n \to \infty$

dvs. $f(x)$ är inte kontinuerlig i $x = 0$ om $c \leq 0$.

Svar a: $c > 0$

b.) $f'(0) = [\text{def av derivata}] = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} =$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{|x|^c}{x} \cdot \sin\dfrac{1}{x^2} = \left[\begin{matrix}\text{Funktionen} \\ \text{är jämn}\end{matrix}\right] = \lim_{x \to 0+} x^{c-1} \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$

$= \left[\begin{matrix}\text{samma situation} \\ \text{som i a) fast med} \\ c-1 \text{ i st. för } c\end{matrix}\right] = \begin{cases} 0 & \text{om } c-1 > 0 \\ \text{ex. ej} & \text{om } c-1 \leq 0 \end{cases}$ Svar b: $c > 1$

(4.) Varje heltal $n \equiv r \pmod{}$, där r är något av heltalen 0 – 9, och detta tal är den "sista siffran" i representationen av talet i basen 10. Varje heltalskvadrat har alltså formen $n^2 \equiv r^2 \pmod{10}$. För de möjliga värdena på r gäller:

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$r^2 \pmod{10}$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Talen 2, 3, 7 och 8 saknas i den nedersta raden, ingen jämn kvadrat kan alltså ha dessa tal som sista siffra.

V.S.B.

(5.) a.) För $c > 0$ och $x \neq 0$ har vi:

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = |x|^c \cdot \underbrace{\left|\sin\frac{1}{x^2}\right|}_{\leq 1} \leq |x|^c \to 0 \text{ då } x \to 0$$

dvs. $f(x)$ är kontinuerlig för $x = 0$ om $c > 0$

För $c \leq 0$ kan vi betrakta t.ex. talföljden $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}}$.

För denna gäller att $x_n \to 0$ då $n \to \infty$

och att $f(x_n) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-c/2} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}_{=1} = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{\overset{-c \geq 0}{-c}} \not\to 0 = f(0)$ då $n \to \infty$

dvs. $f(x)$ är inte kontinuerlig i $x = 0$ om $c \leq 0$.

<u>Svar a:</u> $c > 0$

b.) $f'(0) = [\text{def av derivata}] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|^c \cdot \sin\frac{1}{x^2}}{x} = \left[\begin{array}{l}\text{Funktionen} \\ \text{är jämn}\end{array}\right] = \lim\limits_{x \to 0+} x^{c-1} \cdot \sin\frac{1}{x^2}$

$= \left[\begin{array}{l}\text{samma situation} \\ \text{som i a) fast med} \\ c-1 \text{ i st. för } c\end{array}\right] = \begin{cases} 0 & \text{om } c - 1 > 0 \\ \text{ex. ej} & \text{om } c - 1 \leq 0 \end{cases}$ <u>Svar b:</u> $c > 1$

Om d^2 skulle anta ett minimum (x_0, y_0) i det inre av M $(y_0 > x_0^2)$ skulle det vara ett lokalt minimum till d^2,

Och i så fall skulle $\operatorname{grad} d^2(x_0, y_0) = \left(2(x_0 - 2),\ 2(y_0 - \frac{1}{2})\right) = (0,0)$ dvs $(x_0, y_0) = (2, \frac{1}{2})$; Men denna punkt ligger inte i det inre av M eftersom $y_0 \leq x_0^2$. Eventuella minimipunkter måste alltså ligga på M:s rand, dvs. $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

Vi har att $d^2(x, x^2) = (x-2)^2 + (x^2 - \frac{1}{2})^2 = \varphi(x)$, en funktion som vi undersöker med envariabelmetoder:

$\varphi'(x) = 2(x-2) + 2(x^2 - \frac{1}{2}) \cdot 2x = 4(x^3 - 1)$. Teckenstudie:

x		1	
φ'	$-$	0	$+$
φ	$\searrow$		$\nearrow$

ger att φ:s minsta värde antas för $x = 1$

Motsvarande närmaste punkt är $(1, 1^2) = (1,1)$

Svar: $(1,1)$

Variant II (Lagranges multiplikatormetod)

Enligt uppg. b. så finns det säkert en sådan närmaste punkt eftersom M innehåller sina randpunkter (de där $y = x^2$) och alltså är sluten. Precis som ovan inses att minimipunkten måste ligga på M:s rand. Vi har alltså att lösa problemet: Sök min till $d^2(x,y) = (x-2)^2 + (y - \frac{1}{2})^2$ under bivillkoret $g(x,y) = y - x^2 = 0$.

Lagranges nödvändiga villkor för minimalitet blir då

$$[1]\begin{cases} 2(x-2) = \lambda(-2x) & [i] \\ 2(y - \frac{1}{2}) = \lambda \cdot 1 & [ii] \\ y = x^2 & [iii] \end{cases} \quad \text{eller} \quad [2]\begin{cases} 2(x-2) = 0 \\ 2(y - \frac{1}{2}) = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Systemet [2] saknar lösningar, men för [1] får vi

Division $\frac{[i]}{[ii]}$: $(x-2) = -2x\left(y-\frac{1}{2}\right)$, vilket tillsammans med [iii] ger $x-2 = -2x^3+x \iff x^3 = 1 \iff x = 1 \implies y = 1$

Lagranges villkor uppfylls alltså bara av punkten $(1,1)$. Eftersom vi vet att det finns en minpunkt, så är den alltså $= (1,1)$

(8.) (1) Enligt def i PM-et så kräver vi också att
$a \cdot e = a$ för alla $a \in M$ och
$a \cdot \varphi(a) = e$ för alla $a \in M$.
(Att inversen betecknas a^{-1} i PM:et men $\varphi(a)$ i uppgiften är dessemellan irrelevant.)

(2) (i) $a \cdot x = a \cdot y \implies \varphi(a) \cdot (a \cdot x) = \varphi(a) \cdot (a \cdot y) \overset{\text{II}}{\implies}$
$(\varphi(a) \cdot a) \cdot x = (\varphi(a) \cdot a) \cdot y \overset{\text{IV}}{\implies} e \cdot x = e \cdot y \overset{\text{III}}{\implies} x = y$ ⧖

(ii) $a \cdot x = a \implies \varphi(a) \cdot (a \cdot x) = \varphi(a) \cdot a \overset{\text{II}}{\implies} (\varphi(a) \cdot a) \cdot x = \varphi(a) \cdot a$
$\overset{\text{IV}}{\implies} e \cdot x = e \overset{\text{III}}{\implies} x = e$ ⧖

(3) $\varphi(a) \cdot a \cdot \varphi(a) \overset{\text{II}}{=} (\varphi(a) \cdot a) \cdot \varphi(a) \overset{\text{IV}}{=} e \cdot \varphi(a) \overset{\text{III}}{=} \varphi(a)$

(4) (3): $\varphi(a) \cdot a \cdot \varphi(a) = \varphi(a) \implies$ [Använd (2ii) på fallet $x = a \cdot \varphi(a)$]
$a \cdot \varphi(a) = e$ ⧖

(5) $\varphi(a) \cdot a \cdot e \overset{\text{II}}{=} (\varphi(a) \cdot a) \cdot e \overset{\text{IV}}{=} e \cdot e \overset{\text{III}}{=} e \overset{\text{IV}}{=} \varphi(a) \cdot a$

(6) (5): $\varphi(a) \cdot a \cdot e = \varphi(a) \cdot a \implies$ [Använd (2i) på fallet $x = a \cdot e$, $y = a$]
$\implies a \cdot e = a$ ⧖

De "saknade" villkoren $a \cdot e = a$ och $a \cdot \varphi(a) = e$ är alltså uppfyllda, dvs $(M, \circ)$ är en grupp