Dagens teman

- **Mäktighet hos mängder**
- **Några algebraiska strukturer**
  - **Grupper**
  - **Ringar**
  - **Kroppar**

Mäktighet (antal element) hos mängder

Definition:

$\mathbf{X}$ har mindre eller samma mäktighet än $\mathbf{Y}$ om det finns en injektion $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ definierad på $\mathbf{X}$ och skriver $|\mathbf{X}| \leq |\mathbf{Y}|$.

$\mathbf{X}$ har samma mäktighet än $\mathbf{Y}$ om det finns en bijektion $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, definierad på $\mathbf{X}$ och skriver $|\mathbf{X}| = |\mathbf{Y}|$.

Bernsteins lemma:

> Om $|\mathbf{X}| \leq |\mathbf{Y}|$ och $|\mathbf{Y}| \leq |\mathbf{X}|$, så är $|\mathbf{X}| = |\mathbf{Y}|$
>
> (Dvs. om det finns injektioner $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ och g: $\mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ definierade *på* respektive mängder, så finns det också en biljektion $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, definierad på $\mathbf{X}$.)

Mäktigheten hos de olika talsorterna

$|\mathbf{N}| = |\mathbf{Z}| = |\mathbf{Q}|$

$|\mathbf{N}| < |\mathbf{R}| = |\mathbf{C}|$

Grupper

En mängd **M**, försedd med ett räknesätt, här skrivet , (dvs. en funktion $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$), sådant att

I. $(a \quad b) \quad c = a \quad (b \quad c)$ för alla a, b och c **M**, (Associativitet)

II. det finns ett speciellt element i **M**, vi kallar det här 1, sådant att
$1 \quad a = a \quad 1 = a$ för alla a **M**, (Existens av enhet)

III. till varje a **M** finns ett *inverst* element, vi skriver a^{-1}, sådant att
$a^{-1} \quad a = a \quad a^{-1} = 1$. (Existens av invers)

kallas en *grupp*. Vi skriver här (**M** ,) för gruppen.

Om dessutom

IV. $a \quad b = b \quad a$ för alla a och b **M**, (Kommutativitet)

så säger man att gruppen är *kommutativ* eller *abelsk*.

Ringar

Mängder **M** som är försedda med två ”räknesätt” – vi kallar dem addition (betecknad +) och multiplikation (betecknad $\cdot$), för vilka gäller att

Ri1 $A + 0 = A$, **(Neu+)**

Ri2 $A + B = B + A$, (**Kom+**)

Ri3 $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$. (**Ass+, Ass·**)

Ri4 Till varje A **M** finns ett ”motsatt tal” $-A$ med egenskapen

$$A + (-A) = 0$$ (**Inv+**)

Ri5
$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C),$$
$$C \cdot (A + B) = (C \cdot A) + (C \cdot B),$$ (**Dist**)

kallas *ringar*, (**M**, + , ·)

Notera att man kan formulera definitionen av begreppet ring så här:

> (**M**, + ,·) är en ring om (**M**, +) är en abelsk grupp försedd med ett räknesätt ”·”, som uppfyller den associativa lagen och de distributiva lagrna (Dist).

Om multiplikationen är kommutativ, dvs om

$$A \cdot B = B \cdot A$$

för alla A och B i **M**,

så har man en *kommutativ ring*.

Om det i **M** finns ett speciellt element 1 med egenskapen

$$A \cdot 1 = 1 \cdot A = A \text{ för alla } A \quad \mathbf{M},$$

så föreligger en *ring med enhet*.

Kroppar

Mängder **M** som åtminstone innehåller två element (här betecknade 0 och 1) och är försedda med två ”räknesätt” – vi kallar dem addition (betecknad +) och multiplikation (·), för vilka gäller att

K1 $A + 0 = A$, $A \cdot 1 = A$, **(Neu+, Neu·)**

K2 $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$, (**Kom+, Kom·**)

K3 $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, (**Ass+, Ass·**)

K4 $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$, (**Dist**)

K9+ till varje A **M** finns ett ”motsatt tal” $-A$ med egenskapen

$$A + (-A) = 0, \qquad \textbf{(Inv+)}$$

K9· till varje A **M**, $A \neq 0$, finns ett ”inverst tal” A^{-1} med egenskapen

$$A \cdot A^{-1} = 1, \qquad \textbf{(Inv·)}$$

kallas en *kropp*.

Om dessutom en relation ”<” (olikhet) är definierad så att

K6 för alla A och B gäller exakt en av relationerna
$A < B$, $A = B$, $B < A$, (**O1**)

K7 om $A < B$ och $B < C$ så är $A < C$, (**O2**)

K8 $A < B$ $A + C < B + C$ och, (**O3+**)
om $C > 0$: $A < B$ $A \cdot C < B \cdot C$, (**O3·**)

så säger man att **M** är en *ordnad kropp.*

Dagens uppgift: 13 på utdelat blad för lektion 5.

Isomorfier

Exempel:
Två grupper, $\mathbf{G}_1$ med gruppoperation $*$ och enhet e_1 samt $\mathbf{G}_2$ med gruppoperation $\circ$ och enhet e_2, sägs vara *isomorfa* ("i allt väsentligt lika") om det finns en bijektion $\phi: \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$, sådan att

- $\phi(e_1) = e_2$,
- $\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y)$ för alla x och y $\quad \mathbf{G}_1$.

Två ringar ($\mathbf{S}_1$, + , ·, 0) och ($\mathbf{S}_2$, , , Ø) sägs vara isomorfa om det finns en bijektion $\phi: \mathbf{S}_1 \to \mathbf{S}_2$, sådan att

- $\phi(0) = Ø$,
- $\phi(x + y) = \phi(x) \quad \phi(y)$ för alla x och y $\quad \mathbf{S}_1$,
- $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \quad \phi(y)$ för alla x och y $\quad \mathbf{S}_1$.

Två ordnade kroppar ($\mathbf{K}_1$, + , ·, 0, 1, <) och ($\mathbf{K}_2$, , , Ø, I,) sägs vara isomorfa om det finns en bijektion $\phi: \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$, sådan att

- $\phi(0) = Ø$,
- $\phi(1) = I$,
- $\phi(x + y) = \phi(x) \quad \phi(y)$ för alla x och y $\quad \mathbf{K}_1$,
- $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \quad \phi(y)$ för alla x och y $\quad \mathbf{K}_1$,
- $x < y \quad \phi(x) \quad \phi(y)$ för alla x och y $\quad \mathbf{K}_1$

Man kan visa att alla ordnade kroppar som uppfyller supremumegenskapen är sinsemellan isomorfa — *det finns väsentligen bara en sorts reella tal.*

Ett liknande resultat: Om ($\mathbf{M}_1$, $^+$, 0) och ($\mathbf{M}_2$, °, Ø) båda uppfyller Peanos axiomsystem, så är dessa "algebraiska strukturer" isomorfa — *det finns väsentligen bara en sorts naturliga tal.*