Dagens teman

Funktioner av flera variabler.

- **Rummet $\mathbf{R}^{n}$**
  AMII, kap 2

- **Gränsvärden för funktioner av typ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n}$**
  AMII, kap 3.1

- **Gränsvärden för funktioner av typ $\mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}$ och $\mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{m}$**
  AMII, kap 3.2 - 3.3

Meddelanden

Den andra lektionstimmen kl 14 – 15 den 11 december uppskjuts till senare tillfälle.

Inlämningsuppgifterna som lämnas den 11 december omfattar t.o.m. uppgifterna till förra lektionen.

Definition 2.3r:

Beloppet (*normen* eller *längden*) av en vektor $\boldsymbol{x}$ är

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Avståndet mellan punkterna $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ är:

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

Sats 2.1 (*Schwarz´ olikhet*)

För alla vektorer $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ i $\mathbf{R}^n$ gäller

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|,$$

med likhet om och endast om $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ är parallella,
(dvs $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}$ eller $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$).

Definition 2.4:
Med vinkeln ϕ mellan två vektorer $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ i $\mathbf{R}^n$ menas

$$\phi = \arccos \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}.$$

Sats 2.2: (Triangelolikheten)
För alla vektorer $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ i $\mathbf{R}^n$ gäller

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|,$$

med likhet om och endast om $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ är lika riktade,
(dvs $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}$ där $\lambda \geq 0$ eller $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$).

Viktiga egenskaper hos normen:

$|\boldsymbol{x}| \geq 0$ med likhet om och endast om $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
$|\lambda \boldsymbol{x}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{x}|$
$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$

Exempel på alternativa normer:
1-normen

$$|\boldsymbol{x}|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

och *maximumnormen*

$$|\boldsymbol{x}|_\infty = \max\,(|x_1|\,,\,|x_2|\,,\,\ldots\,,\,|x_n|)$$

Allmännare:
p-normen

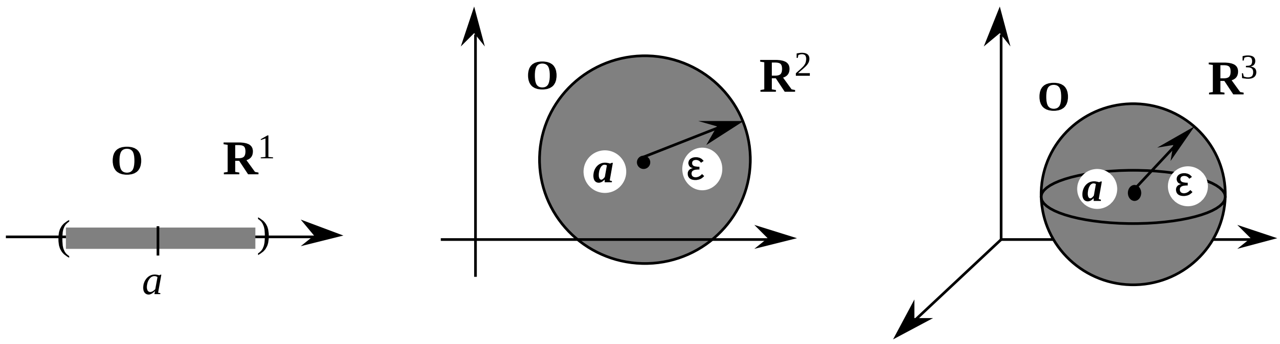
$$|\boldsymbol{x}|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{1/p}$$

Definition 2.5:

De punkter $\boldsymbol{x}$ som ligger på avståndet $< \varepsilon$ från punkten $\boldsymbol{a}$:

$$\mathbf{O} = \{\boldsymbol{x} \quad \mathbf{R}^n;\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \varepsilon \}$$

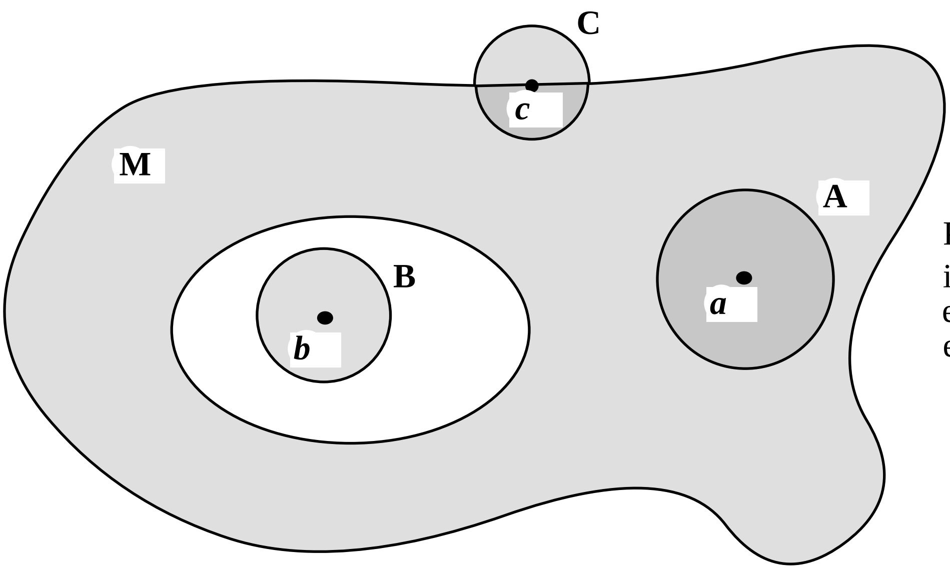
sägs utgöra en (ε-)*omgivning* till $\boldsymbol{a}$.



Definition 2.6:
Låt **M** vara en mängd i $\mathbf{R}^n$ vilken som helst. Vi säger att punkten ***a*** är en *inre punkt* till **M**, om det finns *någon* omgivning **A** till ***a*** som helt ligger i **M** (**A** **M**).

Vi säger vidare att ***b*** är en *yttre punkt* till **M**, om det finns *någon* omgivning **B** till ***b*** som helt ligger utanför **M**, (dvs. $\mathbf{B} \cap \mathbf{M} = \emptyset$).

Slutligen säger vi att ***c*** är en *randpunkt*, om ***c*** varken är inre eller yttre punkt.



Punkten ***a*** är en inre punkt till **M**, ***b*** en yttre punkt och ***c*** en randpunkt.

Definition 2.7

Vi säger att en mängd är *sluten* om den innehåller *alla* sina randpunkter och att en mängd är *öppen* om den *inte* innehåller *en enda* av sina randpunkter.

Definition 2.8

Vi säger att en mängd är *begränsad*
om den är en del av något (n-dimensionellt) klot.
En mängd som är både sluten och begränsad kallas *kompakt*.

Definition 3.1:
Låt $\boldsymbol{x}(t)$ vara en funktion av typ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$. Då är

a. $$\lim_{t \to a} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{c}$$

om och endast om

$$\lim_{t \to a} |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{c}| = 0.$$

b. $$\lim_{t \to a} \boldsymbol{x}(t) = \infty$$

om och endast om

$$\lim_{t \to a} |\boldsymbol{x}(t)| = \infty.$$

Gränsvärdet i *a* kallas *egentligt* och det i *b oegentligt*.

Observationer:

• Om $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots , x_n(t))$, så är för *egentliga* gränsvärden

$$\lim_{t \to a} \boldsymbol{x}(t) = (\lim_{t \to a} x_1(t), \lim_{t \to a} x_2(t), \ldots , \lim_{t \to a} x_n(t))$$

• Om någon av $\lim\limits_{t \to a} x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots , n$, är oegentligt, så är

$$\lim_{t \to a} \boldsymbol{x}(t) = \infty.$$

• *Men* $$\lim_{t \to a} \boldsymbol{x}(t) = \infty$$

innebär inte nödvändigtvis att någon av

$\lim\limits_{t \to a} x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots , n$, är oegentligt.

Definition 3.2: (Kontinuerlig funktion)

En funktion $\boldsymbol{x}(t)$ av typ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ sägs vara *kontinuerlig* i punkten $t = a$ om

$$\lim_{t \to a} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(a)$$

Definition 3.3: (Kurva)

Om $\boldsymbol{x}(t)$ är en funktion av typ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ med ett *intervall* som definitionsmängd och funktionen är kontinuerlig för alla t i detta intervall, så sägs $\boldsymbol{x}(t)$ vara en (*parameter*-)*kurva* i $\mathbf{R}^n$

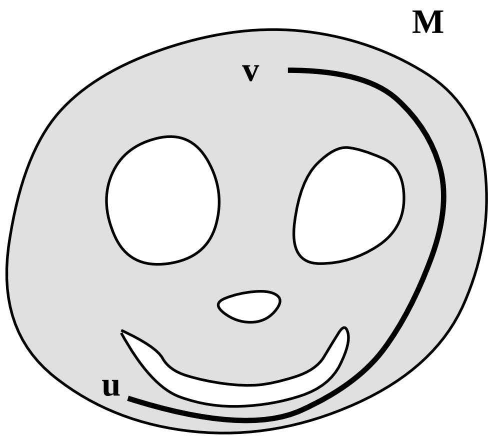
Definition 3.5:

En mängd $\mathbf{M}$ $\mathbf{R}^n$ kallas (*bågvis) sammanhängande*, om varje par av punkter i **M** kan förbindas med en kurva som *helt* ligger i **M**.

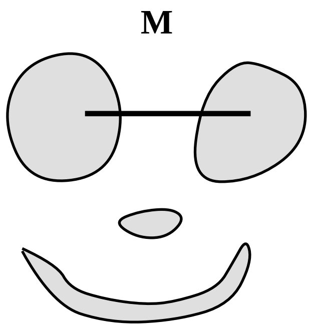
(Eller mera formellt uttryckt:

För alla punkter $\boldsymbol{u}$ $\mathbf{M}$ och $\boldsymbol{v}$ $\mathbf{M}$ så finns en kontinuerlig funktion $\boldsymbol{x}(t)$: $\mathbf{R}$ $[a, b] \to \mathbf{M}$ $\mathbf{R}^n$ sådan att

$$\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{u} \text{ och } \boldsymbol{x}(b) = \boldsymbol{v}.)$$



Exempel på en sammanhängande mängd.



Exempel på en osammanhängande mängd

Definition 3.6: (Gränsvärde, kontinuitet)

Funktionen $f(x,y)$ (av typ $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$) sägs ha *gränsvärdet* A då $(x,y) \rightarrow (a,b)$, (resp.∞),

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A \ ,$$

om

$$\lim_{t \rightarrow c-} f(x(t),y(t)) = A$$

för *alla funktioner* $(x(t),y(t)) = \boldsymbol{r}(t)$ för vilka

$$\lim_{t \rightarrow c-} (x(t),y(t)) = (a,b), \text{ (resp.} \infty \text{)}$$

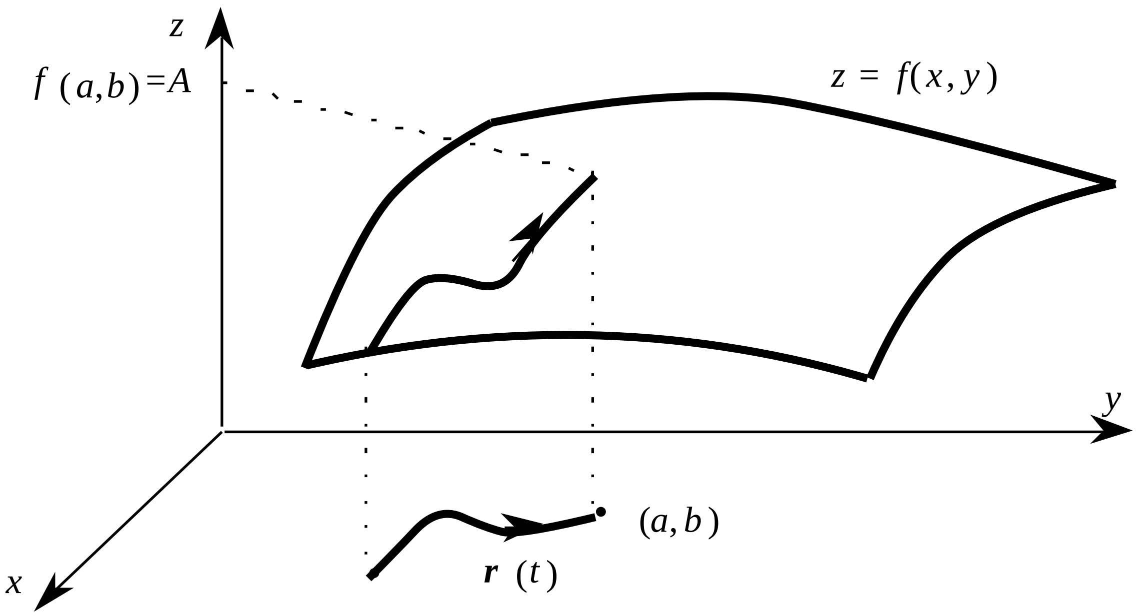
och för vilka $\boldsymbol{r}(t)$:s värden alla ligger i $\mathbf{D}_f - \{(a,b)\}$.

Om

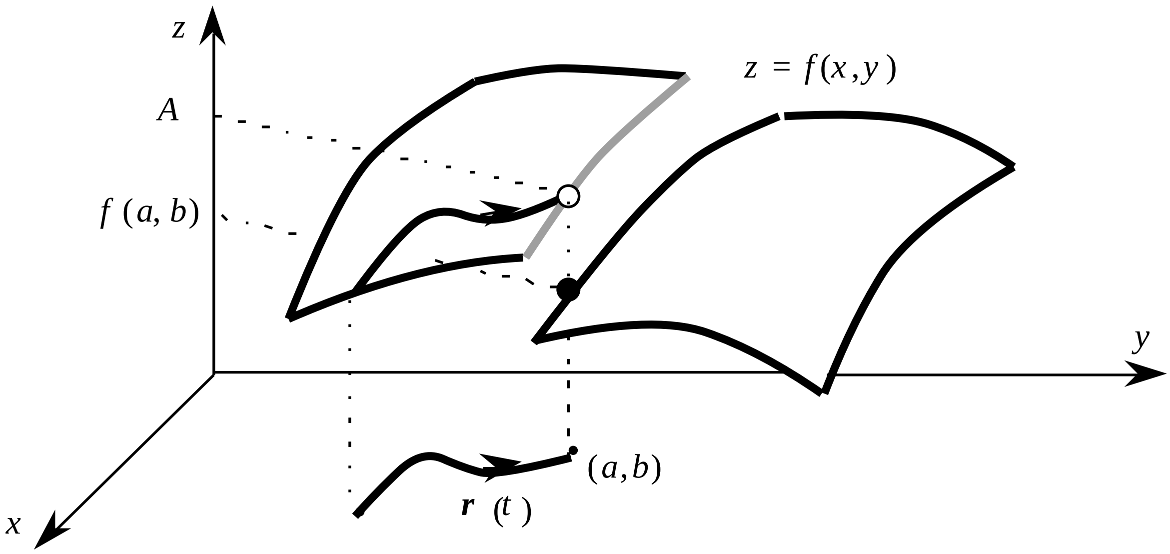
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

säger man att funktionen är *kontinuerlig i punkten* (a,b).

Vidare är funktionen *kontinuerlig*, om den är kontinuerlig i alla punkter i sin definitionsmängd.



Exempel på en kontinuerlig funktion.



Exempel på en diskontinuerlig funktion

Definition 3.6 ':

För funktioner $\boldsymbol{f}$ av typen $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \quad \text{om} \quad \lim_{t \to c-} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{A}$$

för alla *funktioner* $\boldsymbol{x}(t)$ för vilka

$$\lim_{t \to c-} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a} \quad \text{och} \quad \mathbf{V}_{\boldsymbol{x}(t)} \quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{f}} — \{\boldsymbol{a}\}$$

Funktionen $\boldsymbol{f}$ är *kontinuerlig i punkten* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ om

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

Vidare är funktionen *kontinuerlig*, om den är kontinuerlig i alla punkter i definitionsmängden $\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}$.

En alternativ definition till def. 3.6' för de fall då

$\boldsymbol{a} \quad \mathbf{R}^n$ och $\boldsymbol{A} \quad \mathbf{R}^n$ är:

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}$$

om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$, sådant att

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}| < \varepsilon$$

för alla punkter $\boldsymbol{x} \quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}$ som uppfyller

$$0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta$$

Man kan visa att denna definition är ekvivalent med den som gavs ovan.