Dagens teman

- **Kurvor i $\mathbf{R}^n$ och ytor i $\mathbf{R}^3$**
  (AMII, kap 6.1 och 6.3)

- **Taylors formel**
  (AMI, kap 5, AMII, kap 7)

Definition 6.1: (*Parameter*kurva)

Om $\boldsymbol{r}(t)$ är en funktion av typ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ med ett *intervall* som definitionsmängd och funktionen är kontinuerlig för alla t i detta intervall så sägs $\boldsymbol{r}(t)$ vara en (*parameter*)*kurva* i $\mathbf{R}^n$

Obs: *Värdemängden* av en sådan parameterkurva utgör den i geometrisk mening egentliga kurvan!

Definition 6.2: (Styckvis regulär resp. regulär kurva, singulära punkter)

En *styckvis regulär kurva* är värdemängden till en *kontinuerlig* funktion $\boldsymbol{r}(t)$ av typ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$

1. som är definierad på ett *intervall* och
2. som, med undantag för i ett ändligt antal punkter, har en *kontinuerlig derivata* $\boldsymbol{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.

De punkter $\boldsymbol{r}(t)$ där derivatan inte existerar eller är = $\mathbf{0}$ kallas *singulära* (med avseende på parameterframställningen $\boldsymbol{r}(t)$).

Om kurvan är värdemängd för någon $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$-funktion som saknar singulära punkter, så sägs den vara *regulär*.

För det plana fallet:

Sats 6.2:

> Grafen för funktionen $y = f(x)$, definierad på ett intervall, är en regulär kurva om f har en kontinuerlig derivata i alla punkter.

Sats 6.3:

Om $F(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator och punkten (a,b) uppfyller villkoren:

$$F(a, b) = C \quad \text{samt} \quad \text{grad}\, F(a, b) \neq (0, 0),$$

så utgör den mängd punkter som satisfierar sambandet

$$F(x, y) = C,$$

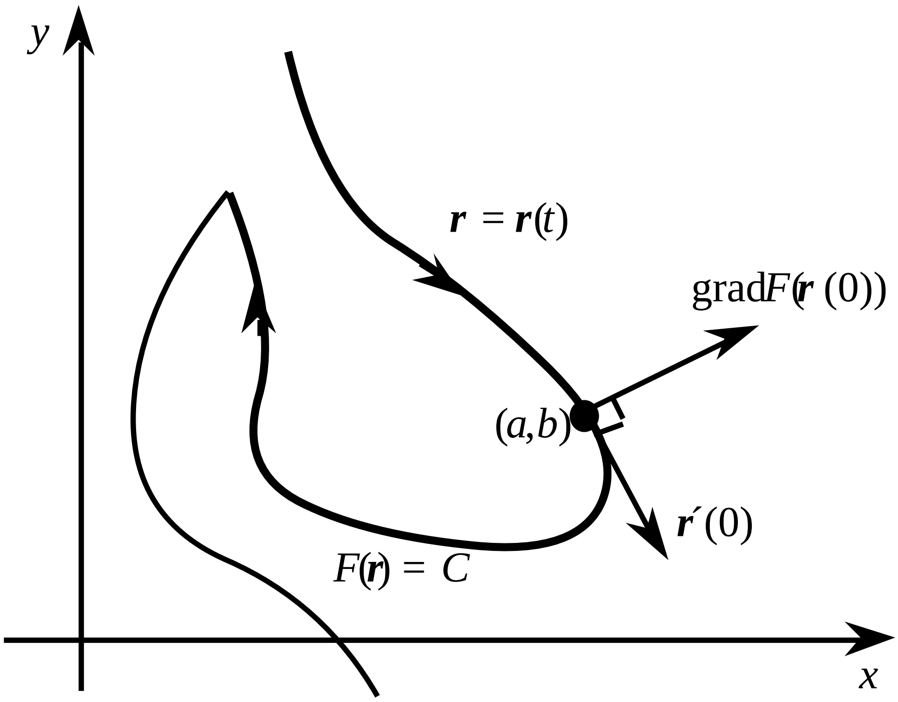
lokalt kring punkten (a,b) en regulär kurva.

Sats 6.3 (Om normalvektorer till nivåkurvor)

Om grad $F(a, b) \neq (0,0)$ för en punkt (a, b) på nivåkurvan

$$F(x, y) = C,$$

så är grad $F(a, b)$ en normalvektor i punkten till nivåkurvan.



Definition 6.4: (Regulärt ytstycke, reguljär yta)

Ett *regulärt ytstycke* i $\mathbf{R}^3$ är värdemängden av en funktion $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w})$ av typ $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ som

- är definierad på ett område

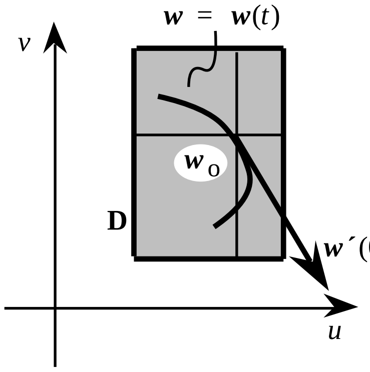
$$\mathbf{D} = \{\boldsymbol{w} = (u, v);\ a < u < b\ ,\ c < v < d\}$$

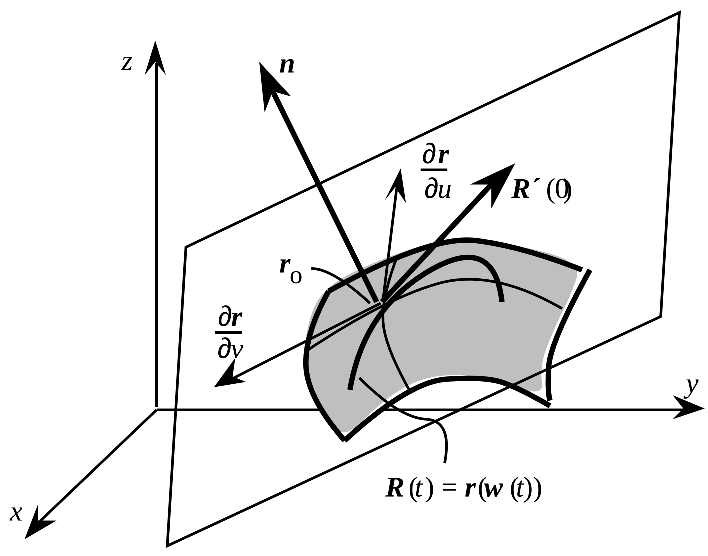
- har kontinuerliga derivator $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ och $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$

sådana att

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \neq \mathbf{0} \text{ för alla } \boldsymbol{w} \quad \mathbf{D}$$

Variablerna u och v kallas *parametrar* och ekvationen $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{w})$ är en *parameterframställning* av ytan.





Planet genom punkten $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w})$ med normalvektorn $\boldsymbol{n}$ är *tangentplanet* till ytan i punkten $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w})$.

En delmängd av $\mathbf{R}^3$ kallas en *regulär yta* om det till varje punkt finns
en omgivning i vilken mängden är ett regulärt ytstycke i ovannämnd mening.

Sats 6.6: (Om reguljära funktionsgrafer)

Grafen till funktionen $z = f(x, y)$, definierad på en rektangel, är ett regulärt ytstycke om f har kontinuerliga partiella derivator i rektangelns alla punkter.

Sats 6.7: (Om reguljära nivåytor)

Om $F(x, y, z)$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten (a, b, c) och uppfyller villkoren

$$F(a, b, c) = C \quad \text{och} \quad \text{grad}\, F(a, b, c) \neq (0,0,0),$$

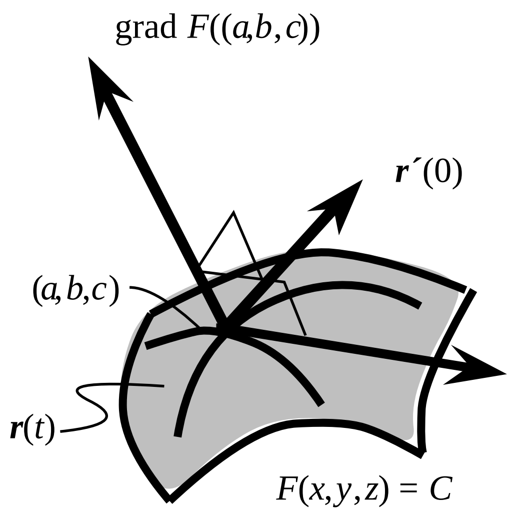
så är mängden

$$\mathbf{M} = \{(x, y, z) \quad \mathbf{R}^3 \,;\, F(x, y, z) = C\}$$

lokalt kring (a, b, c) ett regulärt ytstycke.

Sats 6.8: (Om normalvektorer till nivåytor)

Om grad $F \neq \mathbf{0}$ i en punkt (a, b, c) på en nivåyta $F(x, y, z) = C$, så är grad F en normalvektor till nivåytan i den punkten.



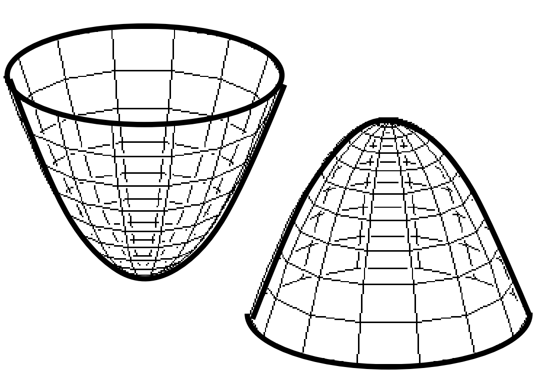
Sats 6.11, sid 133

Grafen för funktionen

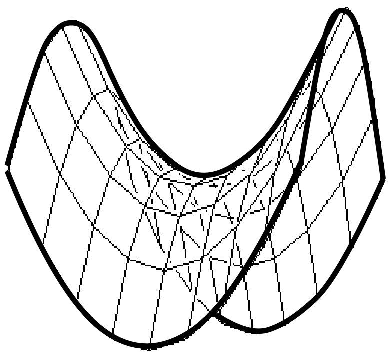
$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

där A, B och C inte alla är = 0 är en

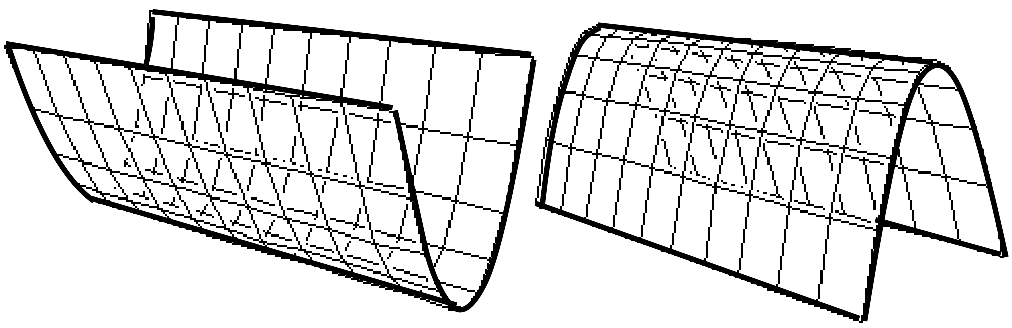
- elliptisk paraboloid om $AC - B^2 > 0$
- hyperbolisk paraboloid om $AC - B^2 < 0$
- parabolisk cylinder om $AC - B^2 = 0$



Elliptiska paraboloider
$AC - B^2 > 0$



Hyperbolisk paraboloid
$AC - B^2 < 0$



Paraboliska cylindrar
$AC - B^2 = 0$, men A, B och C ej alla = 0

Taylors formel:

Envariabelvarianten:

AMI: Sats 5.1: (Taylors formel)

Om $f(x)$ har derivator av godtycklig ordning, så gäller att
$f(x+h) =$

$$f(x) + h\,f'(x) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x) + \frac{1}{(n+1)!}h^{n+1} f^{(n+1)}(x+\tau h),$$

där $0 < \tau < 1$.

AMII: Sats 7.1: (Taylors formel för funktioner av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$)

Om funktionen $f(\boldsymbol{x})$ har kontinuerliga derivator av minst ordningen n+1 i en omgivning av punkten $\boldsymbol{x}$, så är

$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) =$

$$= f(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{h}\cdot\quad)\, f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{h}\cdot\quad)^2 f(\boldsymbol{x}) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}(\boldsymbol{h}\cdot\quad)^n f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{h}\cdot\quad)^{(n+1)} f(\boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{h}),$$

där $0 < \tau < 1$ och $\quad = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$