Dagens teman

- **Taylors formel i R$^{\boldsymbol{n}}$**
  (AMII, kap 7)
- **Extremproblem**
  (AMII, kap 8)

Taylors formel:

Envariabelvarianten:

AMI: Sats 5.1: (Taylors formel)

Om $f(x)$ har derivator av godtycklig ordning, så gäller att
$f(x+h) =$

$$f(x) + h\,f'(x) + \frac{1}{2!}h^2\,f''(x) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}h^n\,f^{(n)}(x) + \frac{1}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(x+\tau h),$$

där $0 < \tau < 1$.

AMII: Sats 7.1: (Taylors formel för funktioner av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$)

Om funktionen $f(\boldsymbol{x})$ har kontinuerliga derivator av minst ordningen n+1 i en omgivning av punkten $\boldsymbol{x}$, så är

$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) =$

$$= f(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{h}\cdot\ \ )\,f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{h}\cdot\ \ )^2 f(\boldsymbol{x}) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}(\boldsymbol{h}\cdot\ \ )^n f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{h}\cdot\ \ )^{(n+1)} f(\boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{h}),$$

där $0 < \tau < 1$ och $\quad = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

Taylorpolynomet av grad 2 skrivet med matrisformalism:

$$p_2 = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}_f(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{h},$$

där $\boldsymbol{J}_f(\boldsymbol{x})$ är Jacobimatrisen och

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n{}^2} \end{pmatrix}$$

är Hesses matris.

Storleksordningar, ordobegreppet

AMI, kap 5.3, AMII, kap 7.2.2. och 7.2.3

Om $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, en funktion av typen $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, i någon omgivning av $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ för någon konstant C uppfyller en olikhet av typen

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq C|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|^k,$$

så skriver man

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{O}(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|^k), \text{ då } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}.$$

Utläses ”(stort) ordo av …”.

Allmännare: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{O}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ då $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$,

betyder att

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq C|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|,$$

i någon omgivning av $\boldsymbol{a}$, för någon konstant C.

Speciellt för resttermen i Taylors formel:

Om f har kontinuerliga $(n + 1)$:a derivator i en omgivning av $\boldsymbol{x}$, så är

$$\frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{h}\cdot\ \ )^{(n+1)} f(\boldsymbol{x} + \tau\boldsymbol{h}) = \mathrm{O}(|\boldsymbol{h}|^{n+1}) \text{ då } \boldsymbol{h} \to \mathbf{0}.$$

Definition 7.1: (Om polynom)

Graden av en term $a_{ij}\, h^i\, k^j$ ($a_{ij} \neq 0$) är $i + j$.
Konstanten 0 tilldelas graden $-\infty$

Graden av ett polynom är
det högsta av gradtalen hos polynomets termer.

Ett polynom sägs vara *homogent* eller vara en *form* om alla dess termer har samma grad.

Motsvarande definitioner görs för polynom amed fler variabler än två.

Sats 7.2:

För *homogena* polynom $p(\boldsymbol{h})$ av grad $n \geq 0$ är

$$p(\boldsymbol{h}) = O(r^n), \quad r = |\boldsymbol{h}|$$

och

$$p(\boldsymbol{h}) \neq O(r^\alpha) \text{ för alla } \alpha > n,$$

då $r \to 0$.

Sats 7.5: (Taylorutvecklingens entydighet)

Om funktionen $f(\boldsymbol{x})$ har kontinuerliga derivator av minst ordningen $n+1$ i en omgivning av punkten $\boldsymbol{x}$ och om

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = p(\boldsymbol{h}) + O(r^{n+1})$$

$$\text{då} \quad r = |\boldsymbol{h}| \to 0$$

och där $p(\boldsymbol{h})$ är ett polynom av grad högst n är ett polynom av grad högst n,

så är $p(\boldsymbol{h})$ funktionen f:s Taylorpolynom av grad $\leq n$ kring punkten $\boldsymbol{x}$.

Sats 8.1: (Nödvändigt villkor för lokala extrempunkter)

Om den tillåtna mängden **T** till målfunktionen $f(\boldsymbol{x})$ är öppen och $\boldsymbol{x}_o$ är en lokal extrempunkt, så är

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_o) = \mathbf{0},$$

eller också är $f(\boldsymbol{x})$ inte deriverbar i punkten.

Sats 8.2: (Tillräckligt villkor för lokala extrempunkter för $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$-funktioner.)

Om $\boldsymbol{a}$ är en kritisk punkt till funktionen $f(x, y)$ av typ $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ och om för andradifferentialen

$$d^2f(\boldsymbol{a}) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$

gäller att

$AC - B^2 > 0$, så är $\boldsymbol{a}$ en lokal extrempunkt,
ett *strängt maximum* om $A < 0$ och
ett *strängt minimum* om $A > 0$.

$AC - B^2 < 0$, så är $\boldsymbol{a}$ *inte* någon extrempunkt.

Definition 8.1: (Kategorisering av former)

En form $p(\boldsymbol{h})$ sägs vara

positivt definit

om $p(\boldsymbol{h}) \geq 0$ med likhet endast om $\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$,

(dvs. om p har ett *strängt minimum* för $\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$),

negativt definit

om $p(\boldsymbol{h}) \leq 0$ med likhet endast om $\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$,

(dvs. om p har ett *strängt maximum* för $\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$),

positivt semidefinit

om $p(\boldsymbol{h}) \geq 0$ med likhet även för vissa $\boldsymbol{h} \neq \mathbf{0}$,

(dvs. om p har ett *osträngt minimum* för $\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$),

negativt semidefinit

om $p(\boldsymbol{h}) \leq 0$ med likhet även för vissa $\boldsymbol{h} \neq \mathbf{0}$,

(dvs. om p har ett *osträngt maximum* för $\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$),

indefinit

om $p(\boldsymbol{h}) > 0$ för vissa $\boldsymbol{h}$ och < 0 för andra $\boldsymbol{h}$,

(p har då inte någon extrempunkt i $\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$).

Generellare:

Sats 8.3: (Tillräckligt villkor för extremvärden för $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$-funktioner.)

Om

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + p_k(\boldsymbol{h}) + O(|\boldsymbol{h}|^{k+1}), \quad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$$

där $p_k(\boldsymbol{h})$ är en form av grad k,

så har funktionen $f(\boldsymbol{x})$ i $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$

- ett strängt lokalt minimum

  om $p_k(\boldsymbol{h})$ är positivt definit,

- ett strängt lokalt maximum

  om $p_k(\boldsymbol{h})$ är negativt definit,

- inget extremvärde alls

  om $p_k(\boldsymbol{h})$ är indefinit.