Dagens teman

- **Linjära rum** (utdelat blad för lektion 6)

- **Terminologi för vissa egenskaper hos delmängder av R.**
  (AMI, sid 2-3, utdelat blad för lekt 7)

- **Supremum och infimum**
  (AMI sid 394-5)

- **Gränsvärden av talföljder**
  (AMI K3.3 sid 402 - 407.)

Om delmängder av R.

Intervall

En delmängd **M**   **R** sägs vara ett *intervall* (eller vara *samman-hängande*) om

u och v **M** och $u < x < v$ x **M**

Slutet begränsat intervall

Öppet begränsat intervall

Halvöppet begränsat intervall

Halvöppet begränsat intervall

Slutet obegränsat intervall

Öppet obegränsat intervall

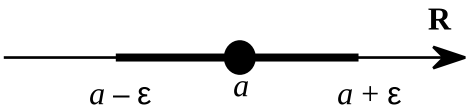
Slutet obegränsat intervall

Öppet obegränsat intervall

Obegränsat intervall

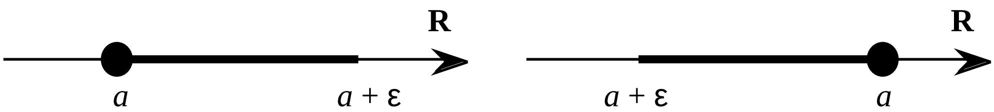
Omgivningar

Ett intervall med punkten a som mittpunkt kallas en *omgivning* till a. Även hela **R** är en omgivning till a.



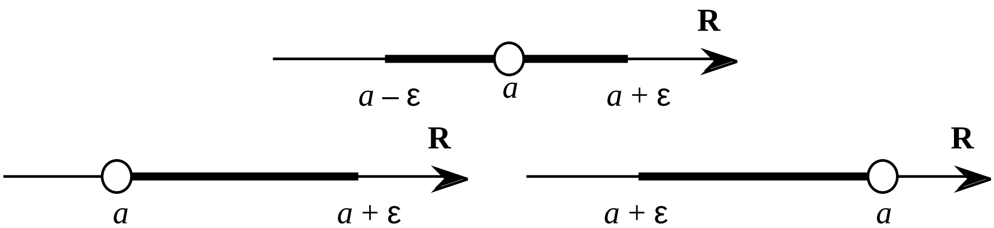
En omgivning till a

Ett intervall som har a som *vänster(*resp. *höger)-ändpunkt* säger man är en *höger(*resp. *vänster)-omgivning* till a.



En högeromgivning till a En vänsteromgivning till a

Tar man bort punkten a från sin omgivning får man en *punkterad omgivning.*



Punkterade omgivningar

Öppna och slutna mängder

Notera att följande gäller:

Ett intervall är öppet om och endast om det till varje punkt i intervallet finns en omgivning som ligger helt inom intervallet.

Definition.

En delmängd **M** **R** är *öppen* om det till varje punkt i mängden finns en omgivning som ligger helt inom mängden.

En delmängd **M** **R** är *sluten* om dess komplement är en öppen mängd.

Inre punkter, yttre punkter, randpunkter

Definitioner

En punkt *a* sägs vara en *inre punkt* till mängden **M** om *a* har någon omgivning **O** som helt ligger inom **M**. (**O**   **M**)

En punkt *b* sägs vara en *yttre punkt* till mängden **M** om *b* har någon omgivning **U** som helt ligger utanför **M**. (**U**   **R** — **M**)

De punkter som varken är inre eller yttre punkter kallas **M**:s *randpunkter*.

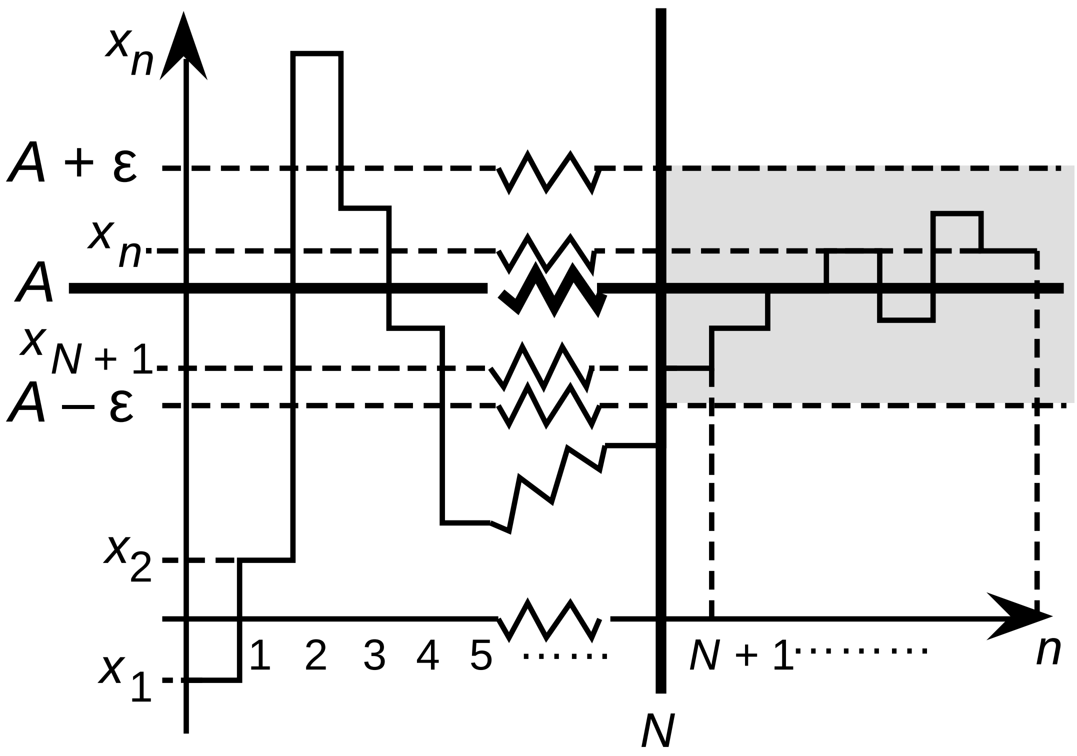
Definition K3.2: (Reellt gränsvärde av talföljd)

Talföljden $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sägs ha *gränsvärdet A* (eller *konvergera mot A*),

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A,$$

om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal $N(\varepsilon)$ sådant att

$$|x_n - A| < \varepsilon \quad \text{för alla } n > N(\varepsilon).$$



Definition K3.3: (Oegentliga gränsvärden för talföljder)

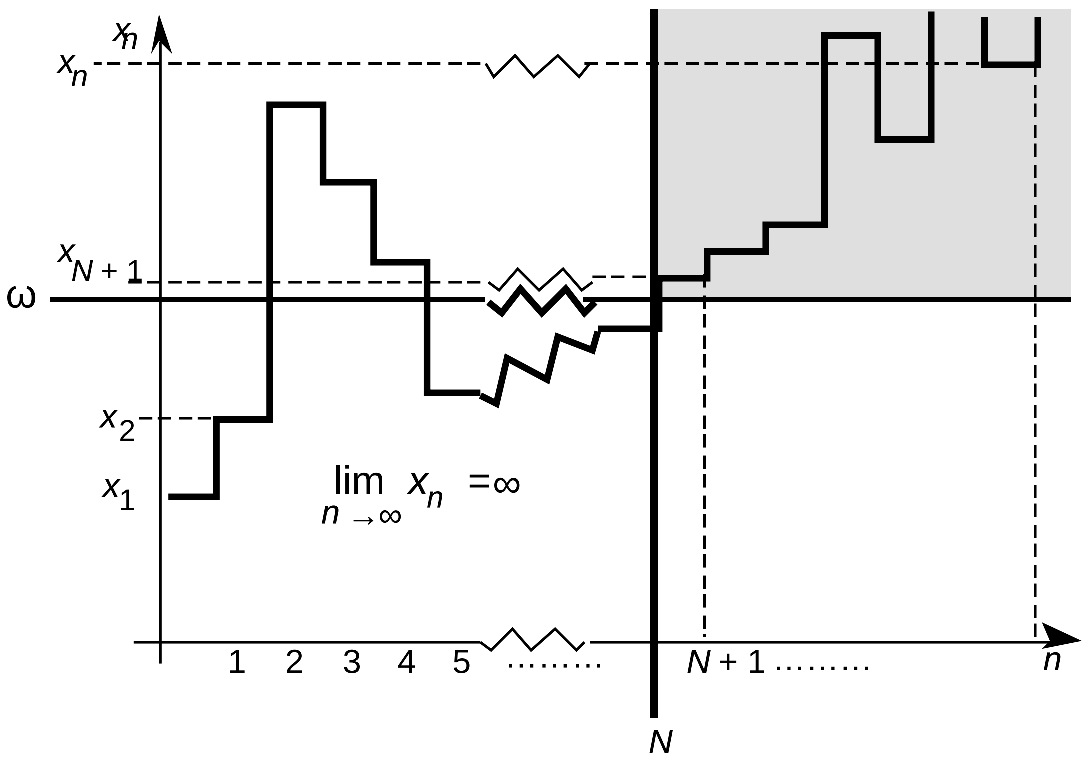
Talföljden $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sägs ha (det *oegentliga*) gränsvärdet

$$\begin{cases} \infty, \text{"(positiva) oändligheten"} \\ -\infty, \text{"negativa oändligheten"} \end{cases}$$

och skriver
$$\lim_{n \to \infty} x_n = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases},$$

om det till varje ω finns ett tal $N(\omega)$ sådant att

$$\begin{cases} x_n > \omega \\ x_n < \omega \end{cases} \text{ för alla } n > N(\omega).$$



Sats K3.2: (Gränsvärdets entydighet)

Om $\lim_{n \to \infty} x_n = A$ och $\lim_{n \to \infty} x_n = B$, där A och B är reella och/eller $\pm\infty$, så är $A = B$.

Sats K3.3:

Beträffande $\lim_{n \to \infty} x_n$ gäller alltid *precis ett* av följande alternativ:

a) $\lim_{n \to \infty} x_n$ är *ett* reellt tal,

b) $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ eller $-\infty$,

c) $\lim_{n \to \infty} x_n$ existerar ej.

Dagens uppgifter: K3.6b, g, K3.9 i AMI.