Dagens teman

- **Oegentliga gränsvärden**
  AMI K3.3 sid 405 - 407.

- **Gränsvärden av funktioner.**
  Kontinuerliga funktioner.
  AMI K3.4 sid 408 - 412.

- **Satser om gränsvärden**
  AMI, K3.5 sid 413 - 425,
  (även 3.3.2, sid 75 - 80).

- **Beräkning av vissa gränsvärden.**
  AMI 3.4 sid 81 - 91.
  De elementära funktionernas kontinuitet.
  AMI K3.6.1, sid 426 - 427.

Definition K3.3: (Oegentliga gränsvärden för talföljder)

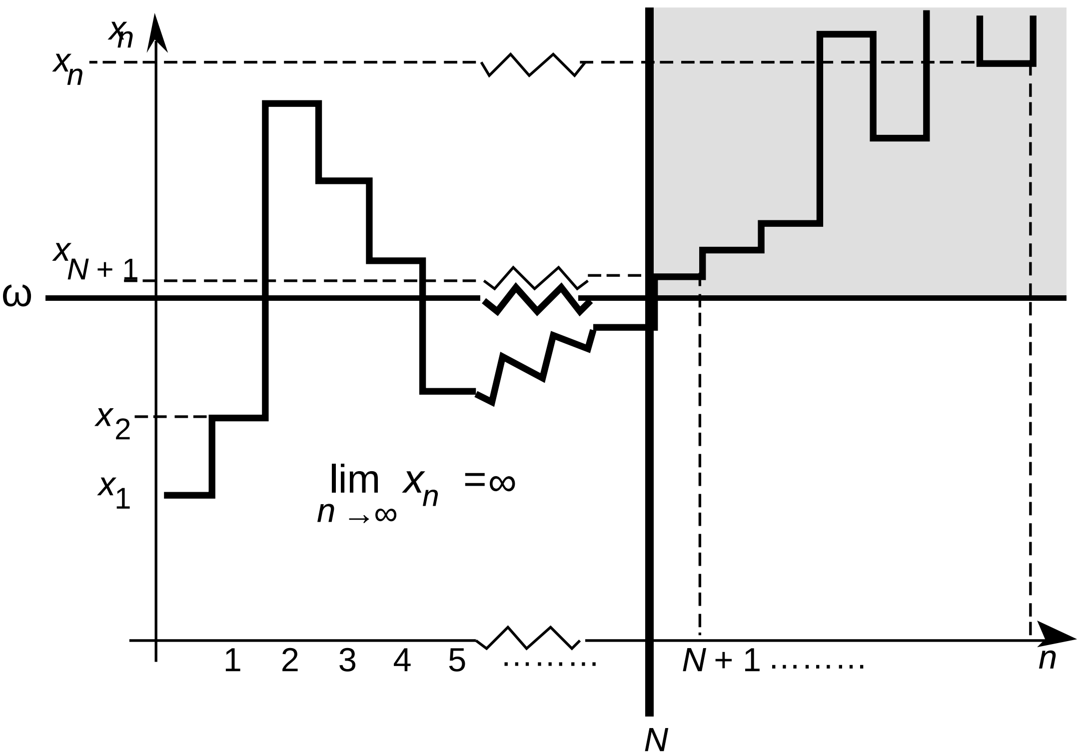
Talföljden $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sägs ha (det *oegentliga*) gränsvärdet

$$\left\{\begin{array}{l} \infty, \text{"(positiva) oändligheten"} \\ -\infty, \text{"negativa oändligheten"} \end{array}\right\}$$

och skriver
$$\lim_{n \to \infty} x_n = \left\{\begin{array}{c} \infty \\ -\infty \end{array}\right\},$$

om det till varje ω finns ett tal $N(\omega)$ sådant att

$$\left\{\begin{array}{l} x_n > \omega \\ x_n < \omega \end{array}\right\} \text{ för alla } n > N(\omega).$$



Viktiga iakttagelser

Sats K3.2: (Gränsvärdets entydighet)

Om $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$ och $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = B$,

där A och B är reella och/eller $\pm\infty$,

så är $A = B$.

Varje kan alltså ha högst ett gränsvärde!

Definition: (Delföljd av talföljd)

Om $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ är en växande, oändlig följd av positiva heltal, så säger vi att följden $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots , x_{n_k}$, är en *delföljd* till följden $x_1, x_2, \ldots , x_n, \ldots$.

Obs!

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$ (reellt eller $\pm\infty$) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = A$

för godtyckliga delföljder till följden $x_1, x_2, \ldots , x_n, \ldots$

Speciellt: Om två olika delföljder till en följd har olika gränsvärden, så *saknar* den ursprungliga följden gränsvärde.

Sats K3.3:

Beträffande $\lim_{n \to \infty} x_n$ gäller alltid *precis ett* av följande alternativ:

a) $\lim_{n \to \infty} x_n$ är *ett* reellt tal,

b) $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ eller $-\infty$,

c) $\lim_{n \to \infty} x_n$ existerar ej.

Terminologi:

Gränsvärdena *existerar* i fallen a) och b)
och är *egentliga* i fallet a),
oegentliga i fallet b).

Talföljderna är konvergenta i fallet a)
och *divergenta* i fallen b) och c).

Definition K3.4: (Gränsvärde av funktion)

Låt $f(x)$ vara en funktion som är definierad åtminstone i någon omgivning av a men inte nödvändigtvis i a, (dvs åtminstone i en punkterad omgivning till a).

Vi säger att funktionen $f(x)$ har gränsvärdet A då x går mot a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

om för varje talföljd x_n, $n = 1, 2, \ldots$ sådan att

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ och } x_n \neq a$$

gäller att

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Om ovanstående i stället bara gäller för talföljder $\left\{ \begin{matrix} x_n < a \\ x_n > a \end{matrix} \right\}$ så säger vi att $f(x)$ har $\left\{ \begin{matrix} \textit{vänstergränsvärdet} \\ \textit{högergränsvärdet} \end{matrix} \right\}$ A då x går mot a,

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A \quad \text{resp} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = A.$$

I de senare fallen behöver funktionen bara vara definierad i någon vänster- respektive högeromgivning till a.

Definition K3.4´: (Alternativ då *a* och *A* reella)

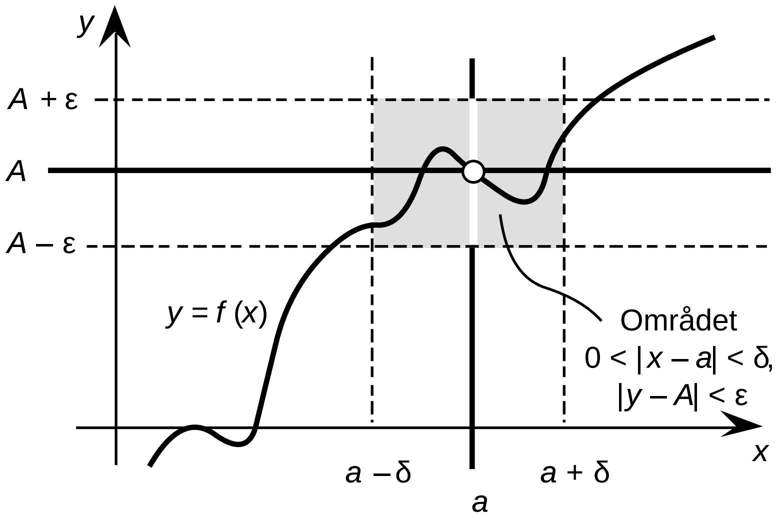
Vi säger att $\lim_{x \to a} f(x) = A,$ om det

till varje ε > 0 finns ett tal δ(ε) > 0, *s*ådant att

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

för alla *x* som uppfyller

$$0 < |x - a| < \delta$$



Talet *A* är sådant att man för varje ε > 0 kan hitta ett tal δ, sådant att den del av funktionens graf som ligger i bandet

$0 < |x - a| < \delta$

i figuren, helt befinner sig inom det streckade området.

Sats (Bevis på sid 411)

De båda definitionerna av $\lim_{x \to a} f(x)$ är ekvivalenta.

Definition K3.5: (Kontinuerlig funktion)

En funktion $f(x)$ sägs vara *kontinuerlig i punkten* $x = a$ om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Om i stället gäller att $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ resp $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$, säger man att $f(x)$ är *höger*- resp *vänsterkontinuerlig* i $x = a$.

En funktion sägs vara *kontinuerlig i ett intervall* (eller union av intervall) om den är kontinuerlig i alla intervallets (intervallens) punkter.

Allmänna satser om gränsvärden.

Sats K3.4: (Aritmetiska lagar)

Om följderna x_n och y_n är konvergenta (dvs gränsvärdet är *reellt*), så är

a. $$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n + \lim_{n \to \infty} y_n,$$

b. $$\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n - \lim_{n \to \infty} y_n,$$

c. $$\lim_{n \to \infty} (x_n \cdot y_n) = (\lim_{n \to \infty} x_n) \cdot (\lim_{n \to \infty} y_n)$$

och om dessutom $\lim_{n \to \infty} y_n \neq 0$, så gäller också

d. $$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} x_n}{\lim_{n \to \infty} y_n}.$$

Sats K3.5 (*a*. Om olikheter, *b*. Instängningsprincipen)

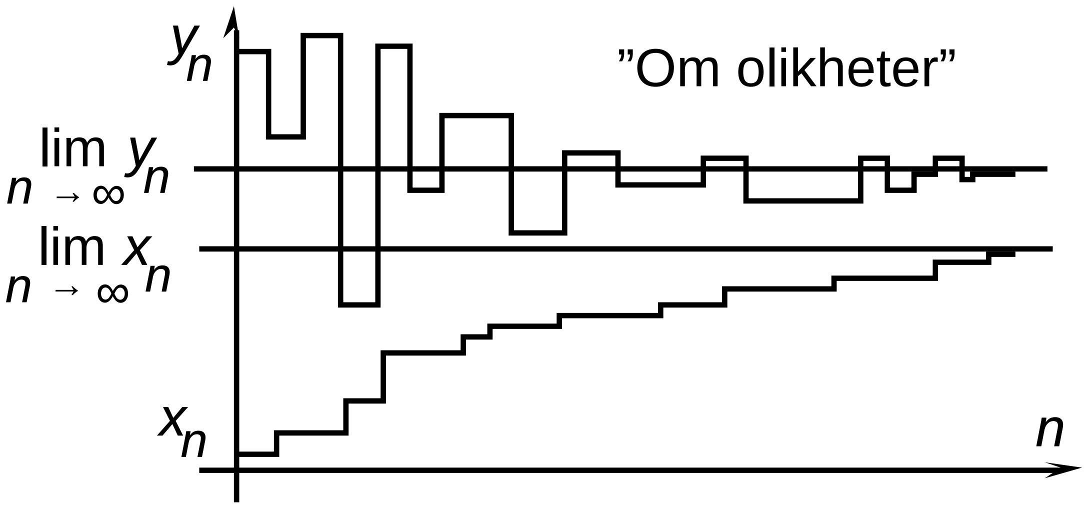
a. Om $x_n \le y_n$ och $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ och $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$ existerar så är

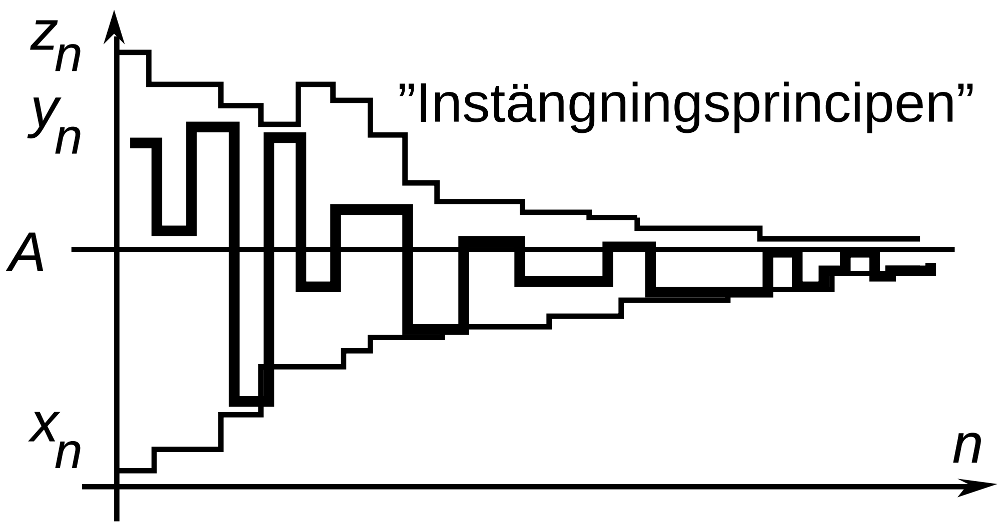
$$\lim_{n \to \infty} x_n \le \lim_{n \to \infty} y_n$$

Om man överenskommer att $-\infty < x < \infty$ för alla reella x, så gäller olikheten också för oegentliga gränsvärden.

b. Om $x_n \le y_n \le z_n$ och $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = A$ så är

$$\lim_{n \to \infty} y_n = A.$$





Sats K3.6: (Principen om monoton konvergens)

Om talföljden x_n är $\begin{cases} \text{växande, } x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le \ldots \\ \text{avtagande, } x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \ldots \ge x_n \ge \ldots \end{cases}$

och begränsad, dvs om det finns något tal C $\begin{cases} \ge x_n \\ \le x_n \end{cases}$ för alla n,

så är följden konvergent.

$\left.\begin{array}{l} \text{Växande} \\ \text{Avtagande} \end{array}\right\}$ och obegränsade följder har gränsvärdet $\begin{cases} \infty. \\ -\infty. \end{cases}$

Monotona följder har alltså alltid ett gränsvärde.

Sats K3.7: (Substitutionsprincipen)

a. Om $t = g(x) \to T$, då $x \to a$ och $g(x) \neq T$, då $x \neq a$

och om $y = f(t) \to A$ då $t \to T$,

så gäller att $f(g(x)) \to A$, då $x \to a$.

b. Om $t = g(x) \to T$, då $x \to a$

och om $y = f(t) \to f(T)$, då $t \to T$,

(dvs f är kontinuerlig för $t = T$),

så gäller att $f(g(x)) \to f(T)$, då $x \to a$

Observera skrivsättet:

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = \left[\begin{array}{c} g(x) = t \\ x \to a \quad t \to T \end{array} \right] = \lim_{t \to T} f(t)$$

Sats K3.8 (Om sammansatta funktioners kontinuitet)

Om $g(x)$ är kontinuerlig i punkten a och $f(t)$ är kontinuerlig i punkten $g(a)$, så är $f \circ g\,(x) = f(g(x))$ kontinuerlig i punkten a.

Några teknikaliteter:

Observation 1:

Om för varje $\varepsilon_1 > 0$ finns ett $N_1(\varepsilon_1)$, sådant att

$$|x_n - A| \leq K\cdot\varepsilon_1 \quad \text{för alla } n \geq N_1(\varepsilon_1),$$

där K är ett positivt tal som inte beror på n eller ε_1, så är

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A.$$

Observation 2:

Om $\lim_{n \to \infty} x_n = A$ (A reellt), så är följden $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ begränsad.

Angående de elementära funktionerna

Kombinerar man ett antal kontinuerliga funktioner med de fyra räknesätten och med sammansättningar, så får man kontinuerliga funktioner som resultat.

Speciellt är våra s.k. *elementära funktioner* av en variabel x uppbyggda på det sättet utifrån

1. konstanter,
2. x,
3. $\sin x$,
4. a^x, (a någon konstant > 0),
5. $\arcsin x$ och
6. $\log_a x$.

Visar man att dessa sex funktioner är kontinuerliga i sin definitionsmängd, så är därför också alla elementära funktioner kontinuerliga i sin definitionsmängd.

Kontinuiteten i fallen 1. och 2. följer direkt ur definitionerna.
Kontinuiteten hos $\sin x$ se ex K3.10, sid 418.
Kontinuiteten hos a^x är något knepigare (eftersom definitionen av den funktionen är mindre trivial). Närmare detaljer finns i avsnitt K2.
Fallen 5. och 6. hanteras enklast via den generella satsen K3.10 om inversfunktioner