Dagens teman

- **De elementära funktionernas kontinuitet.**
  AMI K3.6.1

- **Mer om satser om gränsvärden**
  Monoton konvergens, gränsvärden för inversfunktioner
  AMI sid 419, sid 427

- **Allmänna satser om kontinuerliga funktioner**
  AMI K3.6.2

Meddelanden

Den andra lektionstimmen 14 – 15 den 11 december uppskjuts till senare tillfälle.

Inlämningsuppgifterna som lämnas den 11 december omfattar t.o.m. lekt. nr 10. (4 december)

Sats K3.6: (Principen om monoton konvergens)

Om talföljden x_n är $\begin{cases} \text{växande, } x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le \ldots \\ \text{avtagande, } x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \ldots \ge x_n \ge \ldots \end{cases}$

och begränsad, dvs om det finns något tal C $\begin{cases} \ge x_n \\ \le x_n \end{cases}$ för alla n,

så är följden konvergent.

$\left.\begin{array}{l} \text{Växande} \\ \text{Avtagande} \end{array}\right\}$ och obegränsade följder har gränsvärdet $\begin{cases} \infty. \\ -\infty. \end{cases}$

Monotona följder har alltså alltid ett gränsvärde.

Sats K3.10: (Om inversfunktioner)

Om $f(x)$ är definierad åtminstone i en punkterad omgivning till punkten a, och är kontinuerlig och inverterbar i denna mängd samt

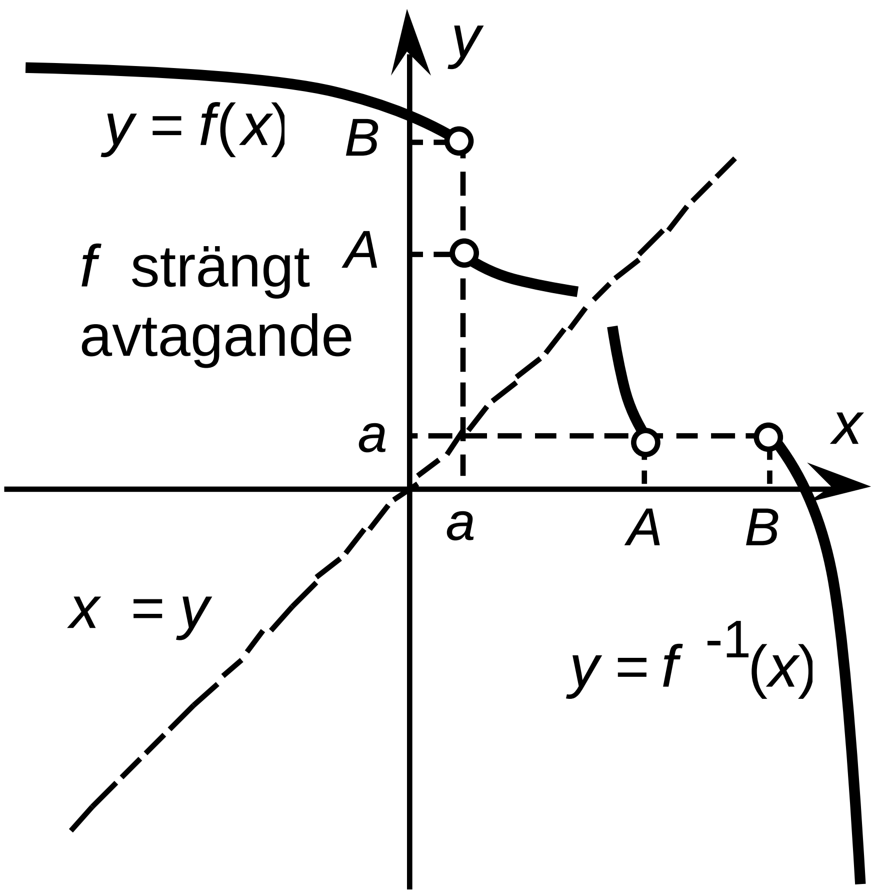
$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \text{så är} \quad \lim_{x \to A} f^{-1}(x) = a$$

Speciellt om $A = f(a)$, dvs om f är kontinuerlig i punkten a, så är

f^{-1} kontinuerlig i punkten $f(a)$.

Påståendena gäller också för enkelsidiga gränsvärden med modifikationer angående höger-vänster. Funktionen behöver då bara vara definierad på motsvarande sida om punkten a.

(Beviset finns på sid 431 - 433, läses kursivt.)

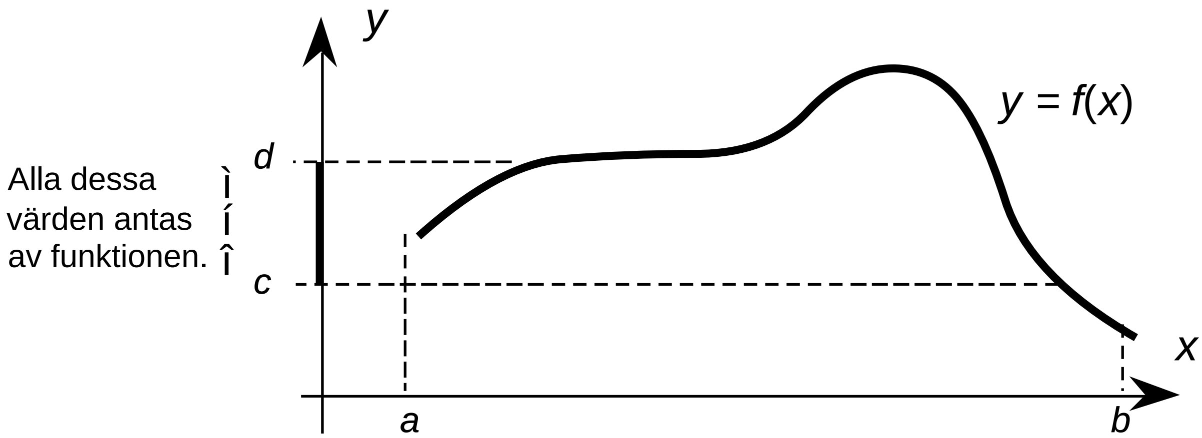


$$\lim_{x \to a+} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to A-} f^{-1}(x) = a$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = B \Leftrightarrow \lim_{x \to B+} f^{-1}(x) = a$$

Sats K3.12: (Om mellanvärden)

Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion definierad på ett intervall och funktionen antar värdena c och d, så antar den också alla värden mellan c och d



Om en funktion är definierad och kontinuerlig på ett intervall så är dess värdemängd också ett intervall.

Sats K3.14: (Om extremvärden)

Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion, definierad på ett *slutet och begränsat* intervall, $a \leq x \leq b$, så antar f ett största och ett minsta värde i intervallet.

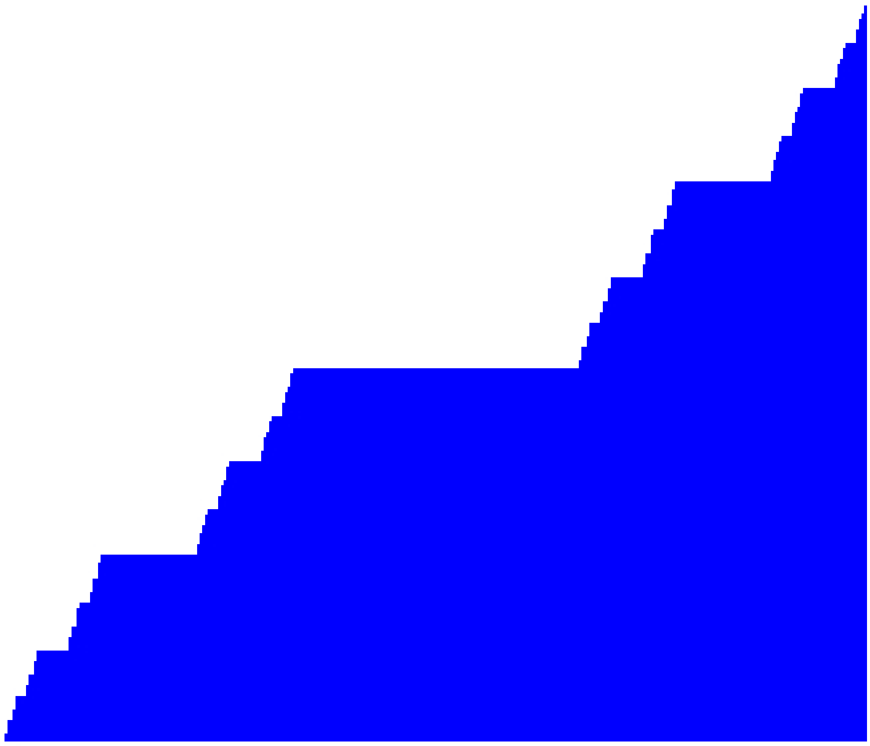
Om definitionsmängden till en kontinuerlig funktion är ett ***slutet och begränsat*** *intervall så är också värdemängden ett intervall av samma slag.*

Några kompletteringar:

- Monotona funktioner har höger- och vänstergränsvärden i varje inre punkt av definitionsmängden.
- Strängt monotona funktioner är alltid inverterbara
- *Kontinuerliga* funktioner definierade på intervall är inverterbara om och endast om de är strängt monotona.

Några kufiska exempel på monotona funktioner

Ex nr 1:



Devil´s staircase

Funktion [0, 1] → [0, 1], växande och kontinuerlig.

Platåernas sammanlagda längd = 1

Ex nr 2:

Låt q_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ vara en uppräkning av de rationella talen i intervallet [0, 1]. För varje x [0, 1] låter vi delföljd av denna följd av rationella tal, som är $< x$.

Låt
$$f(x) = \sum_{n \text{ så att } q_n \leq x}^{\infty} 2^{-n}$$

Denna funktion är strängt växande, diskontinuerlig i alla rationella punkter i [0, 1], men kontinuerlig i de irrationella punkterna.