Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen för SF2710 (f.d. 5B1493), Matematik, fördjupning för CL 07/08, den 5 juni 2008, kl 8.00 – 13.00

Inga hjälpmedel förutom räknedosa och bifogat PM.

Fordringar inklusive bonuspoäng från kursen:

Betyget A: ≥ 21p; B: 18 – 20; C: 16 – 17p; D: 14 – 15p; E: 12 – 13; Fx: 10 – 11 och F: < 10p.

Resultaten Fx och F är underkända, men Fx berättigar till komplettering.

1. a. Talen u och v, $u \neq \pm v$, är båda rationella. Man vet om talen x och y att $vx + uy$ och $ux + vy$ båda är rationella. Bevisa att x och y måste vara rationella. (2p)

   b. Om man inte vet att $u \neq \pm v$, men förutsättningarna f.ö. är som i a, måste x och y då vara rationella? Ge bevis eller motexempel, (1p)

2. Låt $f(x)$ vara en funktion av typ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som definierad och kontinuerlig då $0 < x \leq 1$, (vänsterkontinuerlig då $x = 1$). Vilket eller vilka av följande påståenden är sanna och vilka är falska?

   a. Funktionens värdemängd måste vara ett intervall.

   b. Funktionens värdemängd måste vara sluten.

   c. Funktionen är likformigt kontinuerlig i intervallet $10^{-10} < x \leq 1$.

   Motivera dina svar med bevis eller motexempel. (3p)

3. Låt $$f_n(x) = (\arctan nx)^2, n \quad \mathbf{N}, \text{ och } f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

   a. Beräkna $f(x)$. (1p)

   b. Är konvergensen likformig i intervallen $\mathbf{I}_1 = \{x \quad \mathbf{R}; -1 \leq x\}$ resp. $\mathbf{I}_2 = \{x \quad \mathbf{R}; 1 \leq x\}$? (2p)

   Motivera svaren.

4. Bevisa, att om ett heltal skrivet i basen 10 slutar på någon av siffrorna 2, 3, 7 eller 8, så är det säkert inte kvadraten på något heltal. (3p)

5. Låt $f(x) = |x|^c \sin \dfrac{1}{x^2}$, då $x \neq 0$ och $f(0) = 0$. För vilka värden på den reella konstanten c

   a. är funktionen kontinuerlig för $x = 0$?

   b. är funktionen deriverbar för $x = 0$?

   Motivera dina svar. (3p)

Var god vänd!

6. Låt $\mathbf{M} \neq \quad$ vara en sluten delmängd av $\mathbf{R}^n$ och låt $\boldsymbol{a} \quad \mathbf{R}^n - \mathbf{M}$. Visa att det i **M** finns (minst) en punkt som ligger närmast $\boldsymbol{a}$.
(Ledning: Visa först att det finns en närmaste punkt till $\boldsymbol{a}$ i mängden $\mathbf{M} \cap \mathbf{C}_r$, där $\mathbf{C}_r$ är en till $\boldsymbol{a}$ sluten omgivning som innehåller några punkter från **M**.) (4p)

7. Låt $\mathbf{M} = \{(x, y) \quad \mathbf{R}^2, y \geq x^2\}$ och $\boldsymbol{a} = (2, 1/2)$. Bestäm den punkt i **M** som ligger närmast $\boldsymbol{a}$.
Exakt svar fordras. (Du får använda resultatet från uppgift 6 även om du inte löst den uppgiften.) (3p)

8. Låt **M** vara en mängd, och • ett ”räknesätt” på **M** med följande egenskaper:

I. Om a och $b \quad \mathbf{M}$, så är också $(a \bullet b) \quad \mathbf{M}$.

II. Om a, b och $c \quad \mathbf{M}$, så är $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

III. Det finns ett och bara ett element i **M**, betecknat e, med egensskapen att

$$e \bullet a = a, \text{ för alla } a \quad \mathbf{M}.$$

IV. Det finns en funktion $\phi: \mathbf{M} \to \mathbf{M}$, (definierad för alla $a \quad \mathbf{M}$), sådan att

$$\phi(a) \bullet a = e, \text{ för alla } a \quad \mathbf{M}$$

och e är det element i **M** som beskrivs i III.

Med tanke på den associativa lagens giltighet (II) skriver vi

$$a \bullet b \bullet c \text{ i stället för } (a \bullet b) \bullet c \text{ och } a \bullet (b \bullet c).$$

(1) Vilka egenskaper är inte nämnda i axiomen I – IV för att (**M**, •) skall vara en grupp enligt definitionen av det begreppet i bifogat PM?

Visa att (**M**, •) *är* en grupp, t.ex. genom att visa följande påståenden:

För alla a, x och $y \quad \mathbf{M}$ gäller :

(2) $$a \bullet x = a \bullet y \qquad x = y, a \bullet x = a \qquad x = e,$$

(3) $$\phi(a) \bullet a \bullet \phi(a) = \phi(a).$$

(4) $$a \bullet \phi(a) = e.$$

(5) $$\phi(a) \bullet a \bullet e = \phi(a) \bullet a$$

(6) $$a \bullet e = a$$

Var noga med att motivera varje steg i härledningarna genom att hänvisa till använt axiom eller samband som du har härlett tidigare. Vid härledning av sambandet (n) får du använda dig av påståendena (m), $2 \leq m < n$, även om du inte har härlett dem. (3p)

Lycka till!

PM för tentamen 080605, SF2710

Grupper

En mängd **M**, försedd med ett räknesätt, här skrivet , (dvs. en funktion $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$), sådant att

I. $(a \quad b) \quad c = a \quad (b \quad c)$ för alla a, b och c **M**, (Associativitet)

II. det finns ett speciellt element i **M**, vi betecknar det här 1, sådant att
$1 \quad a = a \quad 1 = a$ för alla a **M**, (Existens av enhet)

III. till varje a **M** finns ett *inverst* element, vi skriver a^{-1}, sådant att
$a^{-1} \quad a = a \quad a^{-1} = 1$. (Existens av invers)

kallas en *grupp*.

Om dessutom

IV. $a \quad b = b \quad a$ för alla a och b **M**, (Kommutativitet)

så säger man att gruppen är *kommutativ* eller *abelsk*.

Definition av kontinuitet

Funktionen $\boldsymbol{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ är kontinuerlig i punkten $\boldsymbol{a}$ om

det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta(\varepsilon, \boldsymbol{a}) > 0$, sådant att

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta \qquad |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| < \varepsilon.$$

Definition av likformig kontinuitet på en mängd M

Funktionen $\boldsymbol{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ är likformigt kontinuerlig på en mängd **M** $\mathbf{R}^n$ om

det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta(\varepsilon,) > 0$, sådant att

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta, \boldsymbol{x} \text{ och } \boldsymbol{a} \quad \mathbf{M} \qquad |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| < \varepsilon.$$

Definition av differentierbarhet

Funktionen $\boldsymbol{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ är differentierbar i punkten $\boldsymbol{a}$ om

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| \cdot \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}),$$

där $\boldsymbol{A}$ är en av $\boldsymbol{x}$ oberoende linjär avbildning $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ (dvs. en $m \times n$- matris) och där

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \mathbf{0}.$$

Kriterium för likformig konvergens av funktionsföljder

Om $f_n(x)$ är en följd av funktioner $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och $f_n \to f$ då $n \to \infty$, så är konvergensen *likformig på delmängden* **G** **R** om och endast om

$$M(n) = \sup_{x \quad \mathbf{G}} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ då } n \to \infty.$$

Nödvändigt villkor för lokal extremalitet

Om $\boldsymbol{x}_o$ är en lokal extrempunkt till problemet:

Maximera/minimera $f(\boldsymbol{x})$ under förutsättning att $g(\boldsymbol{x}) = 0$, där f och g är funktioner av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ med kontinuerliga partiella derivator,

så uppfyller $\boldsymbol{x}_o$ för någon konstant λ villkoren

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_o) = \lambda \operatorname{grad} g(\boldsymbol{x}_o), \\ g(\boldsymbol{x}_o) = 0, \end{cases} \qquad \text{eller} \qquad \text{(B)} \quad \begin{cases} \operatorname{grad} g(\boldsymbol{x}_o) = 0, \\ g(\boldsymbol{x}_o) = 0. \end{cases}$$