# Dagens teman

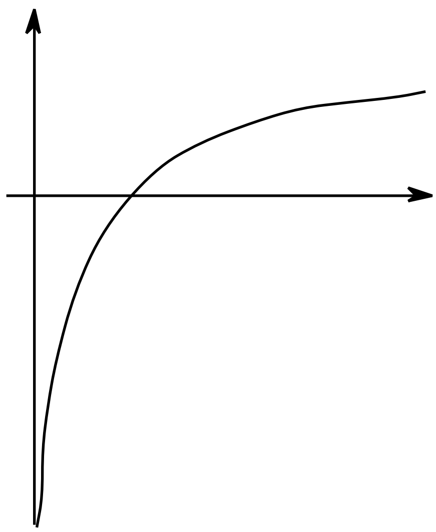
- Bolzano-Weierstrass´ sats
  AMI K3.5.5
  Cauchys konvergensprincip
  Utdelat blad för lektion 8.

- Likformig kontinuitet
  (sid 435 – 441)

***Dagens.*** K3.37a och b.

Lösningar till de snarlika uppgifterna K3.37d och e:

*37d* Svaret kan anas om man betraktar grafen för funktionen
$f(x) = \ln x$, med definitionsmängd $x > 0$.



Funktionen ser ut att variera kraftigt även i korta intervall om dessa väljs nära $x = 0$. Vi försöker därför att visa att funktionens kontinuitetsmodul $M(\delta) = \infty$ för alla $\delta > 0$. Då kan naturligvis $M(\delta)$ inte $\to 0$ då $\delta \to 0+$ , dvs funktionen skulle *inte* vara likformigt kontinuerlig i intervallet $x > 0$.

Notera att man generellt har att

$$\sup_{x \in \mathbf{A}} \geq \sup_{x \in \mathbf{B}}$$ om **B** är en delmängd av **A**.

(Fler $x$ konkurrerar ju om supremumvärdet i vänstra ledet!)

Vi har därför att

$$M(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| \geq \sup_{|x-y| = \delta} |f(x) - f(y)| \ .$$

Utan någon inskränkning kan vi också anta att $0 < x < y = x + \delta$ och får att

$$M(\delta) \geq \sup_{0 < x < x+\delta} (\ln(x+\delta) - \ln x) = \sup_{0 < x < x+\delta} \ln(1 + \delta/x) \ .$$

Men n $(1 + \delta/x) \to \infty$ då $x \to 0+$ för varje $\delta > 0$. Alltså är

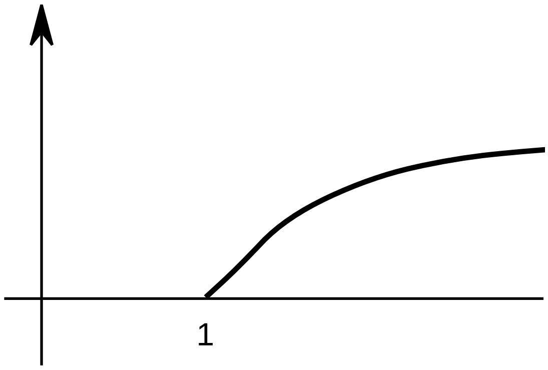
$$\sup_{0 < x < x+\delta} \ln(1 + \delta/x) = \infty$$ och därmed också $M(\delta) = \infty$

Funktionen är inte likformigt kontinuerlig i intervallet $x > 0$. ♦

*37e*: En titt på grafen för funktionen

$g(x) = \ln x$, med definitionsmängd $x > 1$,

låter ana att variationen är störst i närheten av $x = 1$ och att den även där är "liten" i små intervall.




Vi bestämmer därför funktionens kontinuitetsmodul M(δ) och söker visa att den → 0 då δ → 0+..

Här kan vi utan inskränkning anta att $1 < x \le y$ och att $y - x \le \delta$. Man får

$$M(\delta) = \sup_{\substack{1 < x \le y \\ y - x \le \delta}} (\ln y - \ln x)$$

Men $\ln y - \ln x = \ln y/x = \ln\left(1 + \dfrac{y-x}{x}\right) \le \ln\left(1 + \dfrac{\delta}{x}\right) < \ln(1 + \delta)$ .

(Detta eftersom ln-funktionen är strängt växande och $x > 1$.)

Men då är $0 \le M(\delta) < \ln(1 + \delta) \to \ln 1 = 0$ då $\delta \to 0+$.

Funktionen är alltså likformigt kontinuerlig i intervallet $x > 1$. ♦