SF2710, lekt 11, HT07

Dagens teman

Funktioner av flera variabler.

- **Rummet $\mathbf{R}^n$**
  AMII, kap 2

- **Gränsvärden för funktioner av typ**
  $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$
  AMII, kap 3.1

- **Gränsvärden för funktioner av typ**
  $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ och $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$
  AMII, kap 3.2 - 3.3, Studera särskilt 3.3

En komplettering till kap 2

Heine-Borels karakterisering av kompakta mängder i $\mathbf{R}^n$:

Sats: (Heine-Borels lemma)

En mängd $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}^n$ är sluten och begränsad om och endast om varje övertäckning av **M** med oändligt många öppna mängder kan reduceras till en ändlig övertäckning.

Mera formellt uttryckt: Om Ω är en mängd av öppna mängder sådana att

$$\mathbf{M} \subset \bigcup_{\mathbf{O} \in \Omega} \mathbf{O},$$

så finns det redan ändligt många element $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \ldots, \mathbf{O}_N$ i Ω , sådana att

$$\mathbf{M} \subset \bigcup_{k=1}^{N} \mathbf{O}_k.$$

Bevis för fallet $\mathbf{R}^2$:

1°. Anta att **M** är sluten och begränsad och att $\mathbf{M} \subset \bigcup_{\mathbf{O} \in \Omega} \mathbf{O}$, där Ω är en familj av öppna mängder. Anta vidare att påståendet i satsen inte är sant för denna familj Ω. Eftersom **M** är begränsad, så finns det säkert en ”axelparallell rektangel”

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; a \le x \le b, c \le y \le d\},$$

som omfattar **M**. Med axelparallella linjer genom rektangelns mittpunkt delar vi upp rektangeln i fyra delar. Eftersom **M** enligt vårt antagande inte kan täckas över med ändligt många av de öppna mängderna i Ω, så måste detta gälla även minst en av de delar av **M** som ligger i delrektanglarna. (Rita principskiss!)

Vi applicerar delningsproceduren på en sådan delrektangel och hamnar i en likadan situation beträffande de mindre delrektanglarna. Processen kan fortgå obegränsat och vi får en oändlig svit av rektanglar inkapslade i varandra. Och ingen av dessa rektanglar kan övertäckas med ändligt många av de öppna mängderna. (Rita princip-skiss!)

Hörnens x- resp y-koordinater bildar intervallinkapslingar på x- resp. y-axlarna, varför det finns in punkt (ξ, η) som ligger i alla dessa rektanglar.

Men alla rektanglarna innehåller punkter ur **M** och **M** är sluten, så punkten (ξ, η) måste också ligga i **M** och måste följakligen vara med i någon av Ω:s öppna mängder. Låt $\mathbf{O}_1$ vara en sådan mängd. Då måste $\mathbf{O}_1$ innehålla en omgivning **P** till (ξ, η) med, säg, radie r. Välj nu ut en av rektanglarna som helt ligger inom **P** – eftersom rektanglarnas diametrar $\to$ 0, så finns det säkert sådana rektanglar.

Men då får vi en motsägelse: Å ena sidan kan ingen av de konstruerade rektanglarna övertäckas av ändligt många av Ω:s mängder, å andra sidan övertäcks en av dem med en enda av Ω:s mängder.

Vi vet alltså att kompakta mängder har den i satsen nämnda övertäckningsegenskapen.

2° Anta omvänt att en mängd **M** har denna övertäckningsegenskap. Vi vill visa att den då måste vara sluten och begränsad. Vi visar istället den formella motsatsen: Om **M** inte är sluten och begränsad, så konstruerar vi en oändlig övertäckning av **M** med öppna mängder, som inte kan reduceras till en ändlig övertäckning.

Anta alltså att **M** inte är sluten och begränsad. Vi särskiljer två fall, **M** är inte sluten och **M** är obegränsad:

Om **M** inte är sluten, så måste det finnas en randpunkt $\boldsymbol{z}$ till **M** som *inte* ligger i **M**, dvs. finnas en konvergent följd $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ av olika punkter i **M** som har $\boldsymbol{z}$ som randpunkt. Varje punkt $\boldsymbol{x}_k$ i denna följd har en omgivning $\mathbf{P}_k$, som inte innehåller någon av de andra punkterna i följden och inte heller punkten $\boldsymbol{z}$. (Annars skulle följdmedlemmen vara gränspunkt till följden, dvs $= \boldsymbol{z} \notin \mathbf{M}$.). Vi bildar nu en oändlig öppen övertäckning av $\mathbf{R}^2 - \{\boldsymbol{z}\}$ (en mängd som ju omfattar **M**) på följande vis:

Dels tar vi de öppna omgivningarna $\mathbf{P}_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Sedan observerar vi att randpunkterna **Q** till mängden $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ utgörs av just den mängden *och* gränspunkten $\boldsymbol{z}$, varför

$$\mathbf{Q} = \{\boldsymbol{z}\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\boldsymbol{x}_k\} \right),$$

är en sluten mängd och därmed dess komplement $\mathbf{R}^2 - \mathbf{Q}$ en öppen mängd.

Men detta innebär att

Ω = den oändliga familjen av de öppna mängderna $\mathbf{P}_k$ $k = 1, 2, 3, \ldots$ och $\mathbf{R}^2 - \mathbf{Q}$

tillsammans täcker $\mathbf{R}^2 - \{\boldsymbol{z}\}$ och därmed även **M**

$$\mathbf{M} \subset \mathbf{R}^2 - \{\boldsymbol{z}\} = (\mathbf{R}^2 - \mathbf{Q}) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_k \right)$$

och att punkten $\boldsymbol{x}_k$ bland dessa öppna mängder *endast* ligger i $\mathbf{P}_k$. Ingen ändlig delövertäckning kan därför täcka hela talföljden $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ och därmed inte heller **M**.

Om **M** är obegränsad, så finns istället en punktföljd $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ som $\to\infty$, då $k\to\infty$.

I det fallet kommer talföljden själv redan att vara en sluten mängd. Då kommer den öppna övertäckningen Ω bestående av talföljdens komplement och omgivningarna $\{\mathbf{P}_k\}_{k=1}^{\infty}$ definierade som ovan, att täcka hela planet och därmed **M**. Men – precis som i det förra fallet – varje enskilt $\boldsymbol{x}_k$ ligger *endast* i motsvarande $\mathbf{P}_k$ och inte i någon av de andra mängderna i familjen Ω.

Ingen ändlig del av Ω kan därför täcka **M**. ♦

Övningar:

2.3 (sid 14),
3.2 (sid 23),
3.3, 3.4, 3.6 (sid 31-32).

Dagens: 2.3 och 3.4. Vad är anmärkningsvärt med exemplet i övn 3.4?