SF2710, lekt 12, HT07

Dagens tema

- **Kontinuerliga funktioner $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$**
  AMII, kap 3.4

Viktiga satser:

Sats 3.2: (Kompakthetssatser)
Om f är en kontinuerlig funktion av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ och

i $\quad \mathbf{D}_f$ är en *kompakt* mängd, så har f ett största och ett minsta värde.

ii $\quad \mathbf{D}_f$ är *kompakt och sammanhängande*, så antar f varje värde mellan sitt största och sitt minsta.

Speciellt: Om $\mathbf{D}_f$ kompakt och sammanhängande, så är värdemängden, $f(\mathbf{D}_f)$, ett slutet begränsat intervall eller en punkt.

Mera generellt:

Om $\boldsymbol{f}$ är en kontinuerlig funktion av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ och

I. $\quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}$ är en *kompakt* mängd, så är även värdemängden $\boldsymbol{f}(\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}})$ kompakt.

II. $\quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}$ är *sammanhängande,* så är även $\boldsymbol{f}(\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}})$ sammanhängande.

III. (om likformig kontinuitet)
$\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}$ är *kompakt*, så finns en reellvärd funktion, $M(\delta)$, som avtar mot 0, för vilken

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq M(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \text{ för } alla\ \boldsymbol{x} \quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{f}} \text{ och } \boldsymbol{y} \quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}.$$

II gäller även då $\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}$ inte är kompakt – det räcker att $\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}$ är sammanhängande. Beviset härför kommer rätt omedelbart ur definitionen av begreppet ”sammanhang”:

> Anta att $\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}$ är sammanhängande,
> (dvs. att det till varje $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ $\quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}$ finns en kontinuerlig funktion $\boldsymbol{x}(t)$, t.ex. av typ $\mathbf{R} \quad [0,1] \to \boldsymbol{f}(\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}})$, sådan att $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{b}$)
> och $\boldsymbol{f}$ kontinuerlig.
> Vi vill visa att om $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ och $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ är två godtyckliga punkter i $\boldsymbol{f}$:s värdemängd, så finns en kontinuerlig funktion $\boldsymbol{y}(t)$, t.ex. av typ $\mathbf{R} \quad [0,1] \to \boldsymbol{f}(\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}})$, sådan att $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ och $\boldsymbol{y}(1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$.
>
> Men som sådant $\boldsymbol{y}$ duger $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$, där $\boldsymbol{x}$ definierad som ovan. ♦

Angående bevisen för *i*, *ii*, *I* och *III:*

Notera att *i* och *ii* är konsekvenser av *I* och *II* eftersom

- Kompakta delar **P** av **R** alltid har ett största och ett minsta värde: M = sup **P** och m = inf **P** är ju reella (ty **M** är begränsad) och måste tillhöra **P** då de är randpunkter till **P** och **P** är sluten.

- **P** sammanhängande del av **R** $\Leftrightarrow$ **P** är ett intervall eller består av en enda punkt.

Bevisen till *I* resp *III*. kräver litet djupare resonemang.

För fallet *I* och $m = 1$ (reellvärda funktioner) gavs ett bevis i det utdelade materialet till lekt 9. Beviset för allmänt m kan föras nästan ordagrant på samma sätt, om man gör klart för sig att Bolzano-Weierstrass' sats, som ju handlar om delmängder av **R**, kan generaliseras till $\mathbf{R}^n$:

> Varje begränsad oändlig följd av punkter $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ $\mathbf{R}^n$ innehåller en konvergent delföljd.

För fallet *III* och $m = 1$ finns ett bevis i AMI sid 439- 440. Också det beviset kan så gott som ordagrant övertas i det allmänna fallet med godtycklig dimension på värderummet.

Övningar:

AMII 3.7 - 3.10

Rättelse: i uppg 3.10c, sista raden skall stå,

> om $|\boldsymbol{Ax}| = k|\boldsymbol{x}|$, där k är oberoende av $\boldsymbol{x}$

Dagens: AMII: 3.9