SF2710, lekt 15, VT08

Dagens tema

- # Differentierbara funktioner
  (AM II, kap 4 och K2)

Viktigt

Definition av differentierbara funktioner

Definition 4.2 sid 45

En funktion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ sägs vara *differentierbar i punkten* $\boldsymbol{x}$ om den är definierad i en omgivning till $\boldsymbol{x}$ och om

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{h} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})\,|\boldsymbol{h}|$$

där $\boldsymbol{A}$ är en av $\boldsymbol{h}$ oberoende matris och där

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = \mathbf{0}.$$

(Informell tolkning: I ”små” omgivningar av $\boldsymbol{x}$ är funktionen så när som på en konstant term nästan linjär.).

Matrisen $\boldsymbol{A}$ har getts flera namn: ”Totala derivatan av $\boldsymbol{f}$”, ”Jacobimatrisen” , ”Fréchet-derivatan” är några.

Beteckningar: $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$, $\mathbf{J}_{\boldsymbol{f}}$, för fallen då $m = 1$ (reellvärda funktioner) också grad $f(\boldsymbol{x})$ eller $f(\boldsymbol{x})$.

Observationer:

- För $n = m = 1$ (reellvärda funktioner av en reell variabel) är ”differentiertierbar” samma som ”deriverbar”.
- att alla differentierbara funktioner är kontinuerliga och att omvändningen till detta är *inte är* sann. (Inte ens sant för $n = m = 1$.)
- Om $\boldsymbol{f}$ och $\boldsymbol{g}$ är differentierbara och k reell konstant så är också $k\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ och $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$, differentierbra. Om g dessutom är reellvärd och $\neq 0$, så är också $\boldsymbol{f}/g$ differentierbar.

Exempel på linjära funktioner av några olika typer:

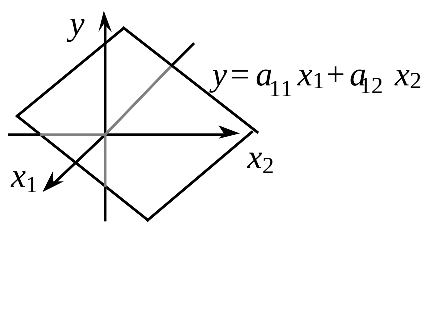
Typ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

$A(x) = A \cdot x$. Grafiskt: Rät linje genom origo i $\mathbf{R}^2$.

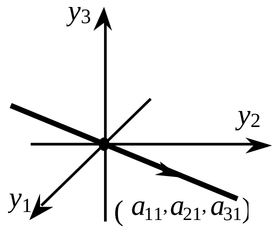
Typ $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$:

$A(\boldsymbol{x}) = (a_{11}, a_{12}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Grafiskt: Plan genom origo i $\mathbf{R}^3$.



Typ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$:



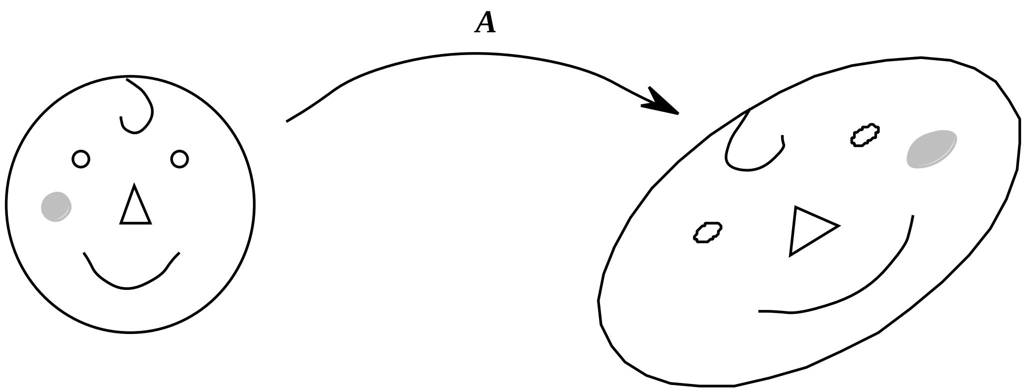
$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdot x.$$

Grafiskt: Rät linje genom origo i $\mathbf{R}^n$. x spelar rollen av parameter.

Typ $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Grafiskt: Linjär deformation av $\mathbf{R}^2$.



Partialderivata och riktningsderivata

Def 4.3, sid 48

Om f av typen $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, så definieras den k:te partialderivatan av

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}),$$

(Dvs den derivata man fårom man betraktar alla variablerna utom den k:te som konstanter).

Def 4.5. sid 65

Om $\hat{\boldsymbol{u}}$ är en enhetsvektor i $\mathbf{R}^n$, så sägs

$$f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + t\hat{\boldsymbol{u}}) - f(\boldsymbol{x})}{t}$$

vara f:s *riktningsderivata* i punkten $\boldsymbol{x}$ i riktningen $\hat{\boldsymbol{u}}$.
(”Gâteaux-derivata”)

(Den k:te partialderivatan är tydligen identisk med riktningsderivatan i den k:te koordinataxeln riktning.)

Relationer mellan begreppen ”differentierbarhet” och ”deriverbarhet”.

Sats 4.4, sid 49

Om f är differentierbar av typen $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, så är

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Om alla partialderivatorna existerar, så behöver funktionen inte vara differentierbar! Se exempel 4.11 sid 59 i AMII.

Däremot gäller

Sats 4.7 (sid 60) och §K2.2 (bevis)

Om alla partiella derivator till $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ är kontinuerliga i en omgivning av en punkt, så är $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ differentierbar i omgivningen.

(Detta betyder bl. a. att alla funktioner med partialderivator som ges av elementära formler, är differentierbara i de punkter dessa partialderivator är definierade i.)

Kedjeregeln

Sats 4.8, 61

Om $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ och $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ är differentierbara funktioner av typ $\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ respektive $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$, så är sammansättningen $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ differentierbar och för Jacobimatriserna gäller

$$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))]' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$$

dvs.
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

Riktningsderivata för differentierbara funktioner

Sats 4.9, sid 66

Om f, av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ är differentierbar i punkten $\boldsymbol{x}$,så är riktningsderivatan i riktningen $\boldsymbol{v}$:

$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}\,.$$

Blandade derivator av högre ordning

Partialderivator av högre ordning, som

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \ \text{och}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\,,$$

är i ovanliga fall olika (se ex 4.10, sid 57), men man har:

Sats 4.5 (sid 56) och §K2.1 (bevis)

Om $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ är kontinuerliga i en omgivning av en punkt, så är de identiska i omgivningen, dvs.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

Övningar: AMII

4.5, sid 54

4.11, sid 58,

4.12, sid 59

4.14c, sid 83

L15.1 För vilka $\boldsymbol{x}$ $\mathbf{R}^n$ är funktionen $f(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$ differentiarbar?

L15.2. Låt

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{|x_1| + |x_2|}{(x_1^2 + x_2^2)^\alpha}, & \text{då } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{då } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

För vilka konstanter α är funktionen
a) kontinuerlig
b) differentierbar
för alla (x_1, x_2) $\mathbf{R}^2$?

Dagens uppgift: L15.2

Logiska sammanhang i analysen