SF2710, lekt 7, HT07

Om delmängder av R.

Intervall

En delmängd **M** **R** sägs vara ett *intervall* (eller vara *sammanhängande*) om

$$u \text{ och } v \quad \mathbf{M} \text{ och } u < x < v \quad x \quad \mathbf{M}$$

(Dvs. om allting mellan två punkter i **M** också finns med i **M.**)

I princip har man de möjligheter som illustreras här nedan:

Slutet begränsat intervall

Öppet begränsat intervall

Halvöppet begränsat intervall

Halvöppet begränsat intervall

Slutet obegränsat intervall

Öppet obegränsat intervall

Slutet obegränsat intervall

Öppet obegränsat intervall

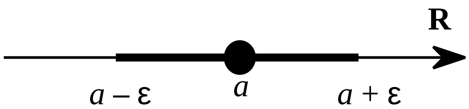
Obegränsat intervall

Intervallens *ändpunkt(er)* är markerade med *a* resp. *b*. De obgränsade intervallen har tydligen bara en ändpunkt eller ingen alls. Intervallet är *slutet* om ändpunkterna (ändpunkten) är med i mängden och *öppet* om de (eller den) inte är det. Intervall med två ändpunkter, där ena ändpunkten ingår men inte den andra, kallas *halvöppna*.

(Fundera över om intervallet **R** är öppet, slutet eller halvöppet och vidare om tomma mängden är ett intervall eller inte.)

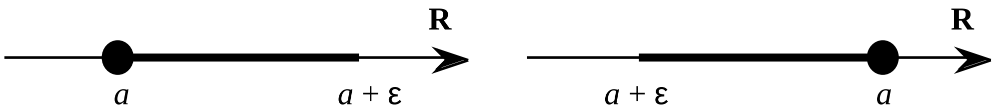
Omgivningar

Ett intervall med punkten *a* som mittpunkt kallas en *omgivning* till *a*. Även hela **R** är en omgivning till *a*.



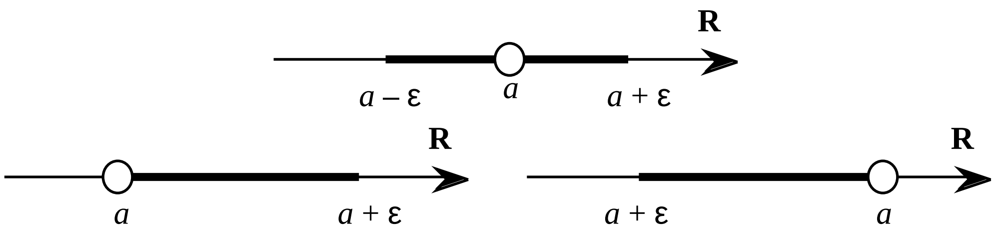
En omgivning till *a*

Ett intervall som har *a* som *vänster(*resp. *höger)-ändpunkt* säger man är en *höger(*resp. *vänster)-omgivning* till *a*.



En högeromgivning till *a* En vänsteromgivning till *a*

Tar man bort punkten *a* från sin omgivning får man en *punkterad omgivning*:



Punkterade omgivningar

Öppna och slutna mängder

Notera att följande gäller:

> Ett intervall är öppet om och endast om det till varje punkt i intervallet finns en omgivning som ligger helt inom intervallet.

Denna iakttagelse ligger bakom följande definition av öppenhet hos delmängder av **M**, även om de inte är några intervall:

> En delmängd **M** **R** är *öppen* om det till varje punkt i mängden finns en omgivning som ligger helt inom mängden.

Övertyga Dig om följande:

Exempel 1: $\mathbf{M}_1 = \{x \quad \mathbf{R};\ x \neq 0\}$ är öppen (men inte något intervall).
$\mathbf{M}_2 = \{x \quad \mathbf{R};\ \sin x\ > 0)$ är öppen. $\mathbf{M}_3 = \{x \quad \mathbf{R};\ 0 \leq x \leq 1\}$ är inte öppen, men det är däremot dess komplement $\mathbf{M}_4 = \mathbf{R} — \mathbf{M}_3$.

Mera allmänt gäller, att ett intervall är slutet om och endast om dess komplement (som i allmänhet inte är något intervall) är en öppen mängd. (Kolla detta!)

Detta har lett till följande generella definition:

> En delmängd **M** **R** är *sluten* om dess komplement är en öppen mängd.

Exempel 2: En mängd bestående av en enda punkt, $\{a\}$, är sluten, likaså är alla mängder som bara har ett ändligt antal element slutna.

Mängden $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ är också sluten, medan mängden $\mathbf{M} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ inte är det.

Inre punkter, yttre punkter, randpunkter

Definitioner

En punkt a sägs vara en *inre punkt* till mängden **M** om a har någon omgivning **O** som helt ligger inom **M**. (Dvs. **O**   **M**)

En punkt b sägs vara en *yttre punkt* till mängden **M** om b har någon omgivning **U** som helt ligger utanför **M**. (Dvs. **U**   **R — M**)

De punkter som varken är inre eller yttre punkter kallas **M**:s *randpunkter*.

Övningar

1. Verifiera det som sägs i exemplen ovan.
2. Verifiera att om $\mathbf{M}_1$ och $\mathbf{M}_2$ är öppna mängder, så är också

   $$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \text{ och } \mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2$$

   öppna mängder.
3. Verifiera att unionen av ett godtyckligt antal öppna mängder är öppen och ge exempel på att motsvarande inte behöver vara sant för skärningar av ett oändligt antal öppna mängder. (Tips för det senare: Betrakta intervallinkapslingar med öppna intervall.)
4. Verifiera att mängden av de rationella talen, **Q**, betraktad som delmängd av **R**, varken är öppen eller sluten.

5*. Verifiera att varje öppen delmängd av **R** är unionen av uppräkneligt många disjunkta öppna intervall. (Ett antal mängder är disjunkta om inga två av dem har någon punkt gemensam.)

6. Verifiera att om **M** är ett intervall, så är randpunkterna desamma som ändpunkterna.
7. Verifiera att randpunkterna till mängden

   $$\mathbf{M} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

   utgörs av **M** $\{0\}$.

8*. Verifiera att randpunkterna till **Q** utgörs av hela **R**..

Supremum och infimum

Se AMI sid 394-5

Övningar: K3.1a, b, g.

Gränsvärden av talföljder

Se AMI K3.3 sid 402 - 407. ”Bredvidläsning”: K3.2.

Övningar: K3.6b, c, g.

Rättelse: På sid 402 i AMI, rad 3 uppifrån står sid.3, skall vara sid 400.

Dagens uppgifter: K3.6b, g, K3.9.