Dagens teman

- Oegentliga gränsvärden
  AMI K3.3, sid 405 - 407.

- Gränsvärden av funktioner. Kontinuerliga funktioner.
  AMI K3.4, sid 408 - 412.

- Satser om gränsvärden
  AMI, K3.5, sid 413 - 425,
  (även 3.3.2, sid 75 - 80).

- Beräkning av vissa gränsvärden.
  AMI 3.4, sid 81 - 91.
  De elementära funktionernas kontinuitet.
  AMI K3.6.1, sid 426 - 427.

- Cauchys konvergensprincip
  Följer nedan

Angående de elementära funktionerna

Kombinerar man ett antal kontinuerliga funktioner med de fyra räknesätten och med sammansättningar, så får man kontinuerliga funktioner som resultat.

Speciellt är våra s.k. *elementära funktioner* av en variabel x uppbyggda på det sättet utifrån följande sex: (Tänk efter hur!)

1. konstanter,
2. x,
3. $\sin x$,
4. a^x, (a någon konstant > 0),
5. $\arcsin x$ och
6. $\log_a x$.

Visar man att dessa sex funktioner är kontinuerliga i sin definitionsmängd, så är därför också alla elementära funktioner kontinuerliga i sin definitionsmängd.

Kontinuiteten i fallen 1. och 2. följer direkt ur definitionerna.

Kontinuiteten hos $\sin x$ se ex K3.10, sid 418.
Kontinuiteten hos a^x är något knepigare (eftersom definitionen av den funktionen är mindre trivial). Närmare detaljer finns i avsnitt K2.

Fallen 5. och 6. hanteras enklast via den generella satsen K3.10 om inversfunktioner

Med följande princip kan man exempelvis visa att en följd är konvergent utan att känna till decss gränsvärde:

Cauchys konvergensprincip:

Gränsvärdet $\lim_{n \to \infty} x_n$ är reellt om och endast om det
för varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal $N(\varepsilon)$, sådant att
för alla heltal p och $q > N(\varepsilon)$ gäller

$$|x_p - x_q| < \varepsilon.$$

Bevis: 1. Anta att $\lim_{n \to \infty} x_n = A$ (reellt). Då finns till varje $\varepsilon > 0$ ett heltal $M(\varepsilon)$, sådant att

$$|x_p - A| < \varepsilon \text{ och } .|x_q - A| < \varepsilon$$

för alla haltal p och $q > M(\varepsilon/2)$. Men då har man att

$$|x_p - x_q| = |x_p - A - (x_q - A)| \leq |x_p - A| + |x_q - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Som den funktion $N(\varepsilon)$, som Cauchys konvergensprincip efterlyser, kan vi alltså ta $M(\varepsilon/2)$.

2. Anta omvänt att förutsättningen i Cauchys konvergensprincip är uppfylld för en viss talföljd. Vi noterar då först att den talföljden måste vara begränsad: Om vi nämligen väljer $\varepsilon = 1$ (t.ex.) så vet vi att $N(1)$ är sådant att $|x_p - x_q| < 1$ för alla heltal p och $q > N(1)$. Speciellt för $q = N(1) + 1$, så har vi att

$$x_q - 1 < x_p < x_q + 1, \text{ för all } p > N(1)$$

Detta säger att alla element i följden x_n med index $\geq N(1) + 1$ ligger i det begränsade intervallet $x_q - 1 < x < x_q + 1$. Hela talföljden, som ju är unionen av talen med index $\geq N(1) + 1$ och de $N(1)$ st följdmedlemmarna med index $\leq N(1)$, måste då också vara begränsad.

Enligt Bolzano-Weiersrass sats så vet vi nu att följden har en konvergent delföljd. Säg att $x_{n(k)}$ är en sådan och att gränsvärdet är A. Då finns till varje $\varepsilon > 0$ ett $K(\varepsilon)$ sådant att

$$|x_{n(k)} - A| < \varepsilon, \text{ för alla } k > K(\varepsilon).$$

Notera nu att man säkerligen har att $n(k) \geq k$, varför man, om k dessutom väljs så att $k > N(\varepsilon)$ – med det N som omtalas i förutsättningarna i Cauchys konvergensprincip – får

$$|x_k - A| = |x_k - x_{n(k)} + (x_{n(k)} - A)| \leq |x_k - x_{n(k)}| + |x_{n(k)} - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Till varje $\varepsilon > 0$ finns alltså ett heltal $M(\varepsilon)$, nämligen $M = \max(N(\varepsilon), K(\varepsilon))$, sådant att

$$|x_k - A| < 2\varepsilon,$$

dvs

$$\lim_{k \to \infty} x_k = A.$$

♦

Exempel: Visa att $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$ har ett reellt gränsvärde.

Lösning: Låt $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$. Med tanke på Cauchys konvergensprincip så betraktar vi differensen $x_p - x_q$. Utan inskränkning kan vi anta att $p \geq q$ (annars ombenämner vi indexen). Man har

$$|x_p - x_q| = \left| \sum_{k=q+1}^{p} \frac{\sin k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \left| \frac{\sin k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \left| \frac{1}{2^k} \right| = \frac{1}{2^q} \left(1 - (1/2)^{p-q}\right) < \frac{1}{2^q} < \frac{1}{q},$$

där vi använt triangelolikheten, att $|\sin x| \leq 1$, att geometriska serier kan summeras och att $2^q > q$ för alla naturliga tal q.

Här ser man nu att för $\varepsilon > 0$. så är $|x_p - x_q| < \varepsilon$ för alla $p \geq q > \frac{1}{\varepsilon}$, Dvs $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ har den egenskap som Cauchys konvergensprincip kräver. Följden är alltså konvergent. ♦

Övningar:

K3.6 g, h (sid 407).
K3.12, 13 (sid 413),
K3.14,15 (sid 418),
K3.18 (sid 422)
K3.23, 24 (sid 428).

Dagens uppgifter

K3.6 g, h, K3.14, K3.23