Dagens teman

- Mer om satser om gränsvärden
  Monoton konvergens, gränsvärden för inversfunktioner
  AMI sid 419, sid 427

- De elementära funktionernas kontinuitet.
  AMI K3.6.1

- Bolzano-Weierstrass´ sats
  AMI K3.5.5

- Cauchys konvergensprincip
  Utdelat blad för lektion 8.

- Allmänna satser om kontinuerliga funktioner
  AMI K3.6.2

Några kompletteringar:

En delmängd **M** av **R** är (se def i papper för lekt 7) öppen det till varje punkt i mängden finns en omgivning som ligger helt inom mängden och den sägs vara sluten om dess komplement är öppet.

Det finns några anmärkningsvärda relationer mellan dessa begrepp och begreppen gränsvärde/kontinuitet.

Sats L9.1 (Karakterisering av slutna mängder) **M** en sluten delmängd av **R** $\Leftrightarrow$ Gränsvärdet för varje konvergent följd i **M** ligger också i **M.**

Så här kan detta inses (rita gärna principskisser till texten):

1. Om, å ena sidan, **M** är sluten (dvs. $\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$ öppen) och $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en konvergent följd i **M** med gränsvärdet *A*, så innehåller varje omgivning av *A* (enl. def av gränsvärde), så när som på ett ändligt antal, alla följdens medlemmar.

Varje omgivning till *A* innehåller alltså punkter från **M**. Men då kan *A* inte tillhöra den *öppna* mängden $\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$. Alltså $A \quad \mathbf{M}$.

2. Om å andra sidan **M** är sådan att varje konvergent följd i den har ett gränsvärde i **M**, så måste varje punkt $B \quad \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$ ha någon omgivning som inte innehåller några punkter i **M**.

I annat fall skulle man ur varje omgivning av typen

$$\{x \quad \mathbf{R};\ |x - B| < \frac{1}{n+1}\}$$

kunna plocka ett $x_n \quad \mathbf{M}$. Denna talföljd skulle ha gränsvärdet *B*, vilket motsäger att alla sådana gränsvärden $\quad \mathbf{M}$. $\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$ är alltså öppen, dvs. **M** sluten. ♦

Sats L9.2. (Karakterisering av kontinuerliga funktioner)
En funktion f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definierad på en öppen mängd, är kontinuerlig *om och endast om*

för alla öppna mängder $\mathbf{M} \subset \mathbf{V}_f$ [1] gäller att $f^{-1}(\mathbf{M})$ är öppen.

Detta kan inses så här:

1. Anta å ena sidan att f är kontinuerlig.
Vi vill visa att $f^{-1}(\mathbf{M})$ är en öppen mängd.

Ta en punkt $a \in f^{-1}(\mathbf{M})$. Då är $f(a) \in \mathbf{M}$. Eftersom $\mathbf{M}$ är öppen, så finns det till $f(a)$ en omgivning som helt ligger i $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{I}_\varepsilon = \{y \in \mathbf{R};\ |y - f(a)| < \varepsilon\} \subset \mathbf{M},\ (\varepsilon > 0).$$

Men enligt definitionen av kontinuitet, så finns det då en funktion $\delta(\varepsilon) > 0$ sådant att omgivningen

$$\mathbf{J}_\delta = \{x \in \mathbf{R};\ |x - a| < \delta\} \text{ till } a$$

avbildas in i $\mathbf{I}_\varepsilon$,

dvs $$\mathbf{J}_\delta \subset f^{-1}(\mathbf{I}_\varepsilon) \subset f^{-1}(\mathbf{M}).$$

Dvs $f^{-1}(\mathbf{M})$ är (enligt def av begreppet) öppen.

2. Anta å andra sidan att för alla öppna mängder $\mathbf{M} \subset \mathbf{V}_f$ gäller att $f^{-1}(\mathbf{M})$ är öppen. Vi vill visa att $f(x)$ är kontinuerlig i en godtycklig punkt a i dess definitionsmängd.

Låt $\varepsilon > 0$ och vara tillräckligt litet för att omgivningen

$$\mathbf{I}_\varepsilon = \{y \in \mathbf{R};\ |y - f(a)| < \varepsilon\} \text{ till } f(a)$$

utgör då en öppen mängd i $\mathbf{V}_f$. Vi vet dåatt också $f^{-1}(\mathbf{I}_\varepsilon)$ är öppen. Men $f^{-1}(\mathbf{I}_\varepsilon)$ innehåller punkten a och därmed någon omgivning till a:

$$\mathbf{J}_\delta = \{x \in \mathbf{R};\ |x - a| < \delta(\varepsilon)\}$$

Men det betyder att $f(\mathbf{J}_\delta) \subset \mathbf{I}_\varepsilon$, dvs

till varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta(\varepsilon) > 0$ sådant att

$$|x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Funktionen f är alltså kontinuerlig för $x = a$. ♦

Mängder som är både slutna och begränsade (oavsett om de är intervall eller ej) kallar man *kompakta*. Ett litet oortodoxt exempel på en kompakt mängd är

$$\{x \in \mathbf{R};\ x = \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}, \qquad \text{(Kontrollera detta!)}$$

Däremot är mängden $\{x \in \mathbf{R};\ x = \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbf{N}\}$ inte kompakt (varför?).

---

[1] $\mathbf{V}_f$ betecknar f:s värdemängd, $\mathbf{D}_f$ f:s definitionsmängd.

.Satsen L9.1 har en motsvarighet för kompakta mängder

> *Sats L9.1´* (Karakterisering av kompakta mängder)
> **M** en kompakt delmängd av **R** $\Leftrightarrow$ Gränsvärdet för varje konvergent följd i **M** ligger också i **M** och ingen följd i **M** har ett oegentligt gränsvärde.

(Obs att en mängd är obegränsad om och endast om den har någon delföljd som har gränsvärdet ∞ eller $-\infty$.)

Satserna om mellanvärden och extermvärden hade som en konsekvens att för kontinuerliga funktioner f, så är $f(\mathbf{M})$ är ett kompakt *intervall* om **M** är det. Mera generellt gäller:

> *Sats L9.3* (Kompakthetssatsen)
> Om f är kontinuerlig och **M** är kompakt (inte nödvändigtvis ett intervall), så är också $f(\mathbf{M})$ kompakt.

Bevis: Anta att f är kontinuerlig och att **M** är en kompakt mängd. Med tanke på karakteriseringen av slutna mängder ovan (L9.1'), räcker det, att förutom att inse att $f(\mathbf{M})$ är begränsad, att gränsvärdet för varje konvergent delföljd i $f(\mathbf{M})$ också ligger i $f(\mathbf{M})$.

Vi börjar med begränsningen: Anta att $f(\mathbf{M})$ inte är begränsad – säg obegränsad uppåt. I så fall finns till varje naturligt tal n ett tal $y_n = f(x_n) > n$, där y_n $f(\mathbf{M})$ och x_n **M**. Ur följden $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ kan vi enligt Bolzano-Weierstrass´ sats plocka en konvergent delföljd $\{x_{n(k)}\}_{k=0}^{\infty}$. Eftersom **M** är kompakt kommer den följdens gränsvärde, a, också att ligga i **M**. Eftersom f är kontinuerlig i punkten a, så är:

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n(k)}) = f(a),$$

vilket motsägs av att $f(x_n) = y_n$, enligt sin konstruktion $\to \infty$ då $n \to \infty$. Mängden $f(\mathbf{M})$ måste alltså vara begränsad.

Slutenheten kan vi visa med ett liknande resonemang: Anta att $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ är en konvergent delföljd i $f(\mathbf{M})$. Ta som ovan ut en konvergent delföljd $\{x_{n(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ ur $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Den delföljdens gränsvärde, a, ligger också i **M** eftersom ju **M** är kompakt. Detta ger att

$$\lim_{k \to \infty} y_{n(k)} = \lim_{k \to \infty} f(x_{n(k)}) = f(a),$$

dvs $f(a)$ $f(\mathbf{M})$ är gränsvärdet för den konvergenta följden $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. ♦

Övningar

K3.26, 27 (sid 428),

K3.29 (sid 431),

K3.30a, c, K3.32 (sid 433),

K3. 35 (sid 435).

Dagens. K3.26, K3.35.