K1 Olika typer av reella tal

De enklaste talen – eller åtminstone de tal som barn först har anledning att syssla med – är de som används när man räknar antal:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Dessa kallas de *naturliga talen*. Mängden av naturliga tal betecknas **N**. *Heltalen* är talen 0, ±1, ±2, ±3, ... alltså de naturliga talen och dessas negativa motsvarigheter. Mängden av heltal betecknas **Z**.[1] På tallinjen ligger heltalen rätt glest, detta i motsats till de allmänna bråken, alias de *rationella** *talen*, **Q**,[2] vilka utgörs av de tal som kan skrivas som en kvot $\frac{p}{q}$ mellan två heltal p och q. Det är omöjligt att inom ett begränsat intervall pricka in alla rationella tal eftersom det finns oändligt många sådana.

Detta följer exempelvis av observationen att talet mitt emellan två rationella tal också är rationellt: Talet $\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)=\frac{p_1q_2+p_2q_1}{2q_1q_2}$ är ju kvoten mellan två heltal om p_1, p_2, q_1 och q_2 är heltal.

Man säger att de rationella talen ligger *tätt* på tallinjen, eftersom varje intervall, hur kort det än är, innehåller oändligt många rationella tal. Anmärkningsvärt är att de rationella talen trots detta inte "fyller ut" tallinjen i den mening som preciserats i fullständighetsegenskapen sid 3. Exempelvis kan man visa att π inte är något rationellt tal – det är *irrationellt*.

I princip kan man på talets decimalbråksutveckling se om det är ett rationellt tal. Man har nämligen:

> Ett tal är rationellt om och endast om dess decimalbråksutveckling fr o m någon viss decimal är periodisk (dvs samma ändliga följd av decimaler upprepas i fortsättningen).

Exempelvis är:

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots = 0.\underline{142857}$$ (Understrykningen markerar de decimaler som upprepas)

$$\frac{7}{13} = 0.\underline{538461} \quad \text{och} \quad \frac{244}{75} = 3.25\underline{3}$$

---

1 Efter tyska Zahl = tal.

2 Efter tyska Quotiente = kvot.

Övningar:

K1.1. Skriv som kvot mellan två heltal:

a) 1.212　　　　b) 1.21$\underline{2}$

K1.2 Vilka rationella tal har en *ändlig* decimalbråksutveckling (dvs har en oändlig decimalbråksutveckling som slutar med idel 0-or?

K1.3 Visa påståendet ovan om rationella tals decimalbråksutveckling.

Anmärkning K1.1:

Det första tal som upptäcktes vara irrationellt är $\sqrt{2}$. Detta gjordes i Grekland på 500 f.Kr (sannolikt av Pythagorerna) och väckte uppståndelse i den dåtida vetenskapliga världen, eftersom det innebar att det talbegrepp man kände till (de rationella talen) inte alltid dög för att exakt bestämma t ex avståndet mellan två punkter. Det talbegrepp vi numera mest använder (de reella talen), som är "gjort" bl a för att exakt kunna mäta vilka avstånd som helst, är därför mera komplicerat än de rationella talen. Det är exempelvis inte alldeles enkelt att ens definiera vad ett reellt tal är utan att använda någon geometrisk åskådning.

Att talet $\sqrt{2}$ är irrationellt, dvs att det *inte* finns några heltal p och q sådana att

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{(K1.1)}$$

kan man inse med ganska kort men fyndig överläggning som strax skall refereras. Observera dock först att påståendet (K1.1) *aldrig* kan bevisas genom något prövningsförfarande – detta eftersom det finns oändligt många rationella tal och varje prövningsförfarande, hur det än är beskaffat, bara kan kontrollera ändligt många. En annan "bevisstrategi" är därför nödvändig: Man *antar* att $\sqrt{2}$ är rationellt (dvs att påståendet (K1.1) är felaktigt) och försöker hitta konsekvenser av detta antagande som är uppenbart motstridiga. Om man lyckas med detta måste ju antagandet vara fel, dvs $\sqrt{2}$ är säkert inte rationellt.[3] Här kommer nu beviset:

Antag att　　$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ där p och q är heltal.

Vi väljer då p och q så att *bråket* $\frac{p}{q}$ *är förkortat så långt som möjligt.*　(K1.2)

Kvadrering och omformning ger:

$$2q^2 = p^2 \qquad \text{(K1.3)}$$

som är en likhet mellan heltal, där $2q^2$ och därmed p^2 är ett jämt tal. Då måste emellertid också p vara ett jämnt tal (ty kvadraten på ett udda tal är alltid udda). Talet p kan alltså skrivas: $p = 2t$ där t är ett heltal. Insättes detta i (K1.3) får man:

$$2q^2 = 4t^2 \text{ dvs } q^2 = 2t^2$$

En liknande överläggning visar sedan att också q är ett jämnt tal.

Bråket $\frac{p}{q}$ *kan alltså förkortas med 2.*

Detta motsäger påståendet (K1.2). Alltså är det ursprungliga antagandet – att $\sqrt{2}$ skulle vara rationellt – fel, dvs $\sqrt{2}$ är irrationellt.[4] ■

Talet $\sqrt[n]{a}$ definieras som den positiva lösningen till ekvationen

$$x^n - a = 0$$

Om a är ett rationellt tal sägs en sådan lösning vara ett *algebraiskt tal.* Allmänt säger man att ett tal som är lösning till en polynomekvation

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o = 0$$

där koefficienterna $a_o, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ är *hela* tal är ett algebraiskt tal.

Exempel K1.1:

Betrakta talet $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Man har

$$x^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6}$$

varav

$$(x^2 - 5)^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24$$

dvs efter omformning

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

Talet x är alltså lösning till en polynomekvation med heltalskoefficienter, dvs x är algebraiskt. ■

Reella tal som inte är algebraiska kallas *transcendenta**. De i många sammanhang viktiga talen π och e har visats vara transcendenta.

Anmärkning K1.2:

Ända till mitten av 1800-talet visste man inte om det överhuvudtaget fanns några transcendenta tal. Numera står dock klart att i viss mening "de flesta" reella tal är transcendenta. En berömd sats i detta sammanhang utsäger att av talen x och e^x så är – med undantag för fallet $x = 0$ – alltid minst ett transcendent. ■

Med hjälp av rotuttryck kan man som bekant skriva upp lösningarna till en godtycklig ekvation av andra graden:

Om $a_2x^2 + a_1x + a_o = 0$　　så är $x = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_o a_2}}{2a_2}$

3 Denna typ av bevis kallas *indirekta bevis, motsägelsebevis* eller bevis *in absurdum*..

4 Beviset finns upptaget i Euklides' Στοιχεια (*Elementa* på latin) som är en mycket betydande lärobok i matematik som skrevs på 300-talet f.Kr. Delar av denna bok har varit förebilder till geometriläroböcker som i svenska skolor användes ända in på 1950-talet! På sina håll i andra länder används sådana läroböcker än idag!

Liknande formler för lösningarna till en allmän ekvation av 3:e eller 4:e graden finns, men dessa är för otympliga för att vara särskilt användbara. Man vet vidare att lösningarna till allmänna ekvationer av högre grad än fyra överhuvudtaget inte kan skrivas upp på ett liknande sätt.[5]

Exempelvis har ekvationen $x^5 + x + 1 = 0$ en lösning vars decimalbråksutveckling börjar $-0.75487766 62\ldots$, men denna lösning kan inte *exakt* uttryckas med hjälp av hela tal, de fyra räknesätten och rotsymbolen.

I praktiken spelar detta fenomen mindre roll eftersom man inom tillämpningar av matematik oftast är helt tillfreds med närmevärden. Bl a för polynomekvationer finns mycket effektiva metoder för att bestämma sådana. Dessa metoder, som också är intressanta då exakta lösningsmetoder finns men är otympliga, behandlas i läroböcker i numeriska metoder.

Tal som beskrivs via en ekvation, som de är lösning till, säges vara *implicit* givna,* detta i motsats till tal som kan uttryckas med hjälp av förut kända tal och gängse formeluttryck,[6] som exempelvis

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt[5]{3}}}{(-1.5)^9}\log_{3.5} 9$$

Sådana tal sägs vara *explicit* givna.

Vi avslutar med ett exempel på en beskrivning av ett tal med hjälp av en intervallinkapsling. Talet ifråga, π, har visats vara transcendent och kan alltså varken explicit eller implicit anges som en rot till en polynomekvation med rationella koefficienter.

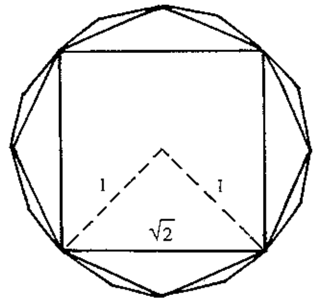
Exempel K1.2: (En intervallinkapsling av talet π)

Talet π kan definieras som arean hos en cirkel med radien 1. Vill man inkapsla talet π är det kanske inte alltför långsökt att om- och inskriva cirkeln med figurer som dels "föga" skiljer sig från cirkeln, dels är så enkla att dessas areor kan beräknas med måttlig ansträngning. Här väljs en modifikation av en idé som användes i detta syfte av Arkimedes.[7] Cirkeln om- och inskrivs med *regelbundna månghörningar med 2n hörn.* Som vi skall se strax, är det nämligen möjligt att beräkna sådana areor med hjälp av de fyra räknesätten och rotutdragning.

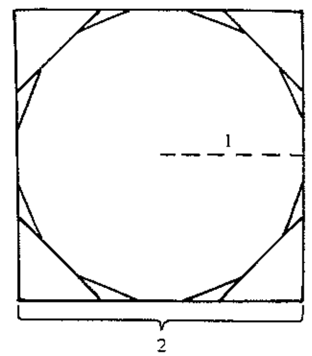
5 För 5:e-gradsekvationer visades detta av norrmannen Abel och för ekvationer av högre grad av fransmannen Galois — båda verksamma under förra hälften av 1800-talet.

6 Vad som är "förut känd" och "gängse" är en konventionssak. Till "kända" tal brukar man dock alltid förutom de rationella räkna de transcendenta talen e och π. Till de "gängse formlerna" räknas de som beskrivs i avsnittet 2.2 om elementära funktioner.

7 Betydande grekisk matematiker, fysiker och tekniker, verksam under 200-talet före Kr.



Inskrivna regelbundna månghörningar med 4, 8 resp. 16 hörn.



Omskrivna regelbundna månghörningar med 4, 8 resp. 16 hörn.

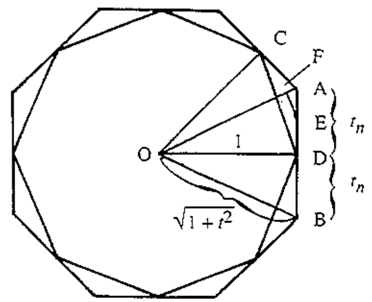
Om areorna hos de om- respektive inskrivna figurerna med 2^n hörn betecknas med Θ_n respektive i_n så har man

$$i_2 < i_3 < \ldots < i_n < \pi < \Theta_n < \ldots \ \Theta_3 < \Theta_2$$

Med tanke på att vi för $n = 2$ har att göra med kvadrater med sidorna 2 resp $\sqrt{2}$, är $\Theta_2 = 4$ och $i_2 = 2$.

För att beräkna de övriga månghörningarnas areor gör vi följande observationer:

1°



In- och omskriven regelbunden månghörning med med 2^n hörn (här ritade som 8-hörningar). AB resp CD är sidorna i om- resp inskrivna månghörningen. Halva AB kallas t_n.

Den omskrivna månghörningen består av 2^n st trianglar av format som OAB.

Triangeln OAB:s area är $\dfrac{2t_n \cdot 1}{2} = t_n$.

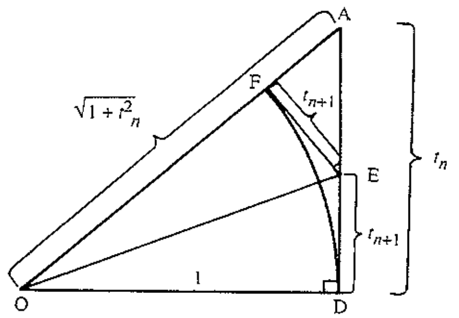
Alltså är månghörningens area: $\Theta_n = 2^n \cdot t_n$ (K1.4)

Den inskrivna månghörningen är likformig med den omskrivna. Eftersom den omskrivnas diameter $= 2\sqrt{1+t_n^2}$ och den inskrivnas är 2, har man, då ytskalan är kvadraten av längdskalan:

$$i_n = \Theta_n \cdot \left(\frac{2}{2\sqrt{1+t_n^2}}\right)^2 = \Theta_n \cdot \frac{1}{1+t_n^2} = \lceil \text{enl (K 1.4)} \rceil = \Theta_n \cdot \frac{1}{1+\Theta_n^2 \cdot 4^{-n}} \qquad \text{(K1.5)}$$

ur Θ_n kan alltså i_n beräknas.

2° Vi betraktar triangeln OAD närmare och ritar samtidigt in sidorna FE och ED till den omskrivna regelbundna månghörningen med dubbla antalet hörn. Dess area har vi betecknat med Θ_{n+1}.



Vi får ett samband mellan t_n (=halva sidlängden i omskrivna 2^n-hörningen) och t_{n+1} (=halva sidlängden i den omskrivna månghörningen med dubbla antalet hörn) genom att beräkna arean T av triangeln OAD på två olika sätt.

Dels är

$$T = \frac{OD \cdot DA}{2} = \frac{1 \cdot t_n}{2},$$

och dels är

$$T = (\text{arean av ODE}) + (\text{arean av OAE}) = \frac{OD \cdot DE}{2} + \frac{OA \cdot FE}{2} =$$

$$= \frac{1 \cdot t_{n+1}}{2} + \frac{\sqrt{1+t_n^2} \cdot t_{n+1}}{2} = \frac{\left(1+\sqrt{1+t_n^2}\right) \cdot t_{n+1}}{2}$$

Varav, om de två uttrycken för T sätts lika:

$$t_n = \left(1+\sqrt{1+t_n^2}\right) \cdot t_{n+1}$$

alltså

$$t_{n+1} = \frac{t_n}{1+\sqrt{1+t_n^2}}$$

Enligt (K1.4) ovan har vi att arean

$$\Theta_{n+1} = 2^{n+1} t_{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot t_n}{1+\sqrt{1+t_n^2}} = \left[t_n = \frac{\Theta_n}{2^n} \right] = \frac{2\Theta_n}{1+\sqrt{1+4^{-n}\Theta_n^2}}$$

Sammanfattningsvis är alltså

$$\begin{cases} \Theta_2 = 4 \\ \Theta_{n+1} = \dfrac{2\Theta_n}{1+\sqrt{1+4^{-n}\Theta_n^2}} & \text{(K1.6)} \\ i_2 = 2 \\ i_n = \dfrac{\Theta_n}{1+4^{-n}\Theta_n^2} & \text{(K1.5)} \end{cases}$$

Sambandet (K1.6) kan nu användas för att successivt bestämma $\Theta_3, \Theta_4, \Theta_5 \ldots$ osv och (K1.5) för att bestämma $i_3, i_4, i_5 \ldots$ osv..: Att man på så vis kan bestämma π med godtycklig noggrannhet följer av att enligt (K1.5):

$$\Theta_n - i_n = \Theta_n - \frac{\Theta_n}{1+4^{-n}\Theta_n^2} = \Theta_n \frac{1+4^{-n}\Theta_n^2 - 1}{1+4^{-n}\Theta_n^2} = \frac{4^{-n}\Theta_n^3}{1+4^{-n}\Theta_n^2} <$$

$$< 4^{-n}\Theta_n^3 \le 4^{-n}\Theta_2^3 = 4^{-n} \cdot 4^3 = \frac{1}{4^{n-3}}$$

som kan göras godtyckligt litet om n väljs tillräckligt stort.

En uträkning av Θ_n och i_n för $n \le 6$ ger följande resultat. (Kontrollera gärna detta – en räknedosa med rotknapp underlättar).

Antal hörn	Θ_n	i_n	n
4	4	2	2
8	3.314	2.828	3
16	3.183	3.061	4
32	3.152	3.121	5
64	3.144	3.137	6

Värdena givna med 3 korrekt avrundade decimaler.

Här avläser man att $3.137 < \pi < 3.144$ och får det välkända resultatet att $\pi \approx 3.14$ med två korrekt avrundade decimaler! ■

Övning:

K1.4 Talet $\sqrt{2}$ är irrationellt, dvs ekvationen

$$p^2 - 2q^2 = 0$$

kan inte uppfyllas för några heltal p och q. En metod för att skaffa sig närmevärden till $\sqrt{2}$ går ut på att man istället bestämmer naturliga tal p och q som uppfyller ekvationen

$$p^2 - 2q^2 = 1 \qquad (*)$$

För sådana heltal gäller nämligen att:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2 = \frac{1}{q^2} \qquad (**)$$

Om q är ett *stort* tal så gäller alltså att $\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2 \approx 0$, dvs $\frac{p}{q}$ är ett närmevärde till $\sqrt{2}$, och relationen (**) ger en uppfattning om felets storlek.

Genom att pröva olika (små) värden på p och q hittar man utan större ansträngning några heltal som uppfyller (*). Exempelvis duger $p=3$ och $q=2$. Som approximation till $\sqrt{2}$ är $p/q = 3/2$ dock rätt dålig, detta eftersom $q=2$ inte är något "stort" tal. Ett sätt att hitta andra lösningar med större värden på q är som följer:

Antag att p_o och q_o är sådana att

$$p_o^2 - 2q_o^2 = 1$$

Kvadrering ger:

$$(p_o^2 - 2q_o^2)^2 = 1$$

eller, efter omformning med hjälp av identiteten $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

$$(p_o^2 + 2q_o^2)^2 - 8p_o^2q_o^2 = 1$$

Sätter man här

$$\begin{cases} p_o^2 + 2q_o^2 = p_1 \\ 2p_oq_o = q_1 \end{cases} \qquad (***)$$

så uppfyller p_1 och q_1 ekvationen $p_1^2 - 2q_1^2 = 1$.

Sammanfattningsvis: Om p_o och q_o uppfyller (*) så uppfyller också de större talen(!) $p_1 = p_o^2 + 2q_o^2$ och $q_1 = 2p_oq_o$ sambandet (*). Talet $\frac{p_1}{q_1}$ kommer därför att vara ett bättre närmevärde till $\sqrt{2}$ än vad $\frac{p_o}{q_o}$ är. Genom att upprepa detta kan man successivt beräkna bättre och bättre närmevärden till $\sqrt{2}$.

a) Om $p_o = 3$, $q_o = 2$ så är (kolla!) $p_1=17$, $q_1=12$. Uppskatta felets storlek i approximationen $\sqrt{2} \approx \frac{17}{12}$.

b) Om $p^2 - 2q^2 = 1$: Visa att felet i approximationen $\frac{p}{q} \approx \sqrt{2}$ är av storleksordningen $\frac{1}{2\sqrt{2}q^2}$.

c) Använd (***) för att successivt bestämma ett närmevärde till $\sqrt{2}$ så att felet $< 10^{-11}$.

d) Kopiera förfarandet ovan för att beräkna ett rationellt närmevärde till $\sqrt{3}$ som ger tre korrekta decimaler.

e) Hur ser motsvarigheten till "iterationsformeln" (***) ut för ett liknande förfarande för att bestämma talet $\sqrt{N}$ (N ej jämn kvadrat).

f) Om felet i närmevärdet $\frac{p_o}{q_o}$ är δ_o och det i närmevärdet $\frac{p_1}{q_1}$ är δ_1

visa att $\qquad \delta_1 \le \frac{1}{8N^{3/2}} \cdot \delta_o^2$

och verifiera tumregeln: "Vid varje iteration nästan fördubblas antalet korrekta decimaler."