De fyras gäng

Vi har arbetat med fyra olika typer av fouriertransformer:

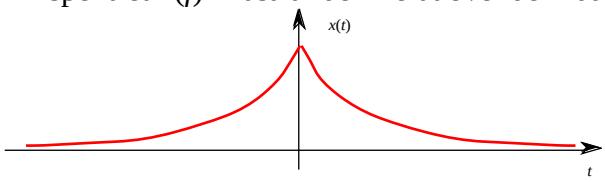
1. Den ”egentliga” fouriertransformen (FT):

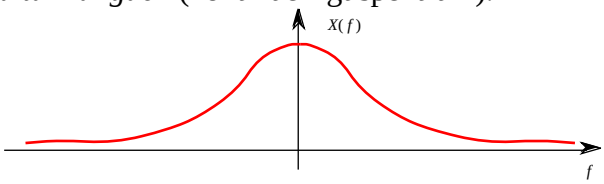
$$x(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt,$$

med invers

$$X(f) \xrightarrow{\text{FT}^{-1}} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{2\pi j f t}\, df,$$

där signalen $x(t)$ är definierad över den *reella talmängden* (tidskontinuerlig signal) och frekvens-spektret $X(f)$ likaså är definierat över den *reella talmängden* (kontinuerligt spektrum).





2. Fourierserieutveckling (FS):

$$x(t) \xrightarrow{\text{FS}} X_k = \frac{1}{P} \int_{a}^{a+P} x(t)\, e^{-2\pi j k t/P}\, dt,$$

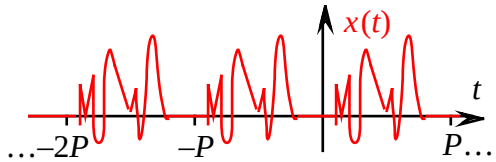
med invers

$$X_k \xrightarrow{\text{FS}^{-1}} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{2\pi j k t/P}$$

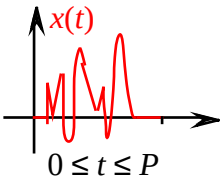
där signalen $x(t)$

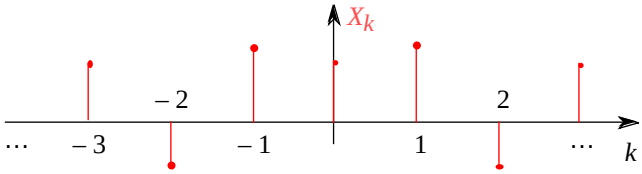
antingen är definierad på *hela reella talmängden*, men då *P-periodisk*,
eller definierad i ett *reellt intervall med längd P*.

Frekvensspektret är i detta fall en oändlig *talföljd*, X_k, $k = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, numrerad med *alla heltalen* (diskret spektrum).



eller



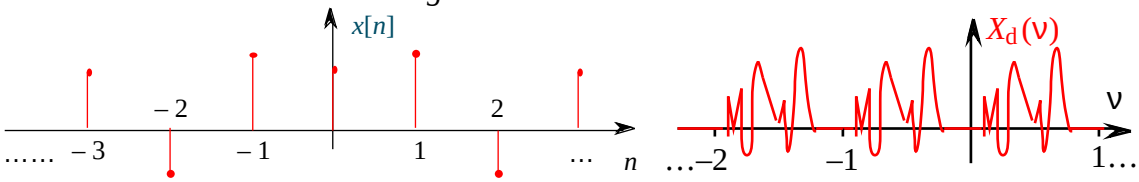


3. Tidsdiskreta fouriertransformen (TDFT):

$$x[n] \xrightarrow{\text{TDFT}} X_d(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-2\pi j n\nu},$$

med invers $$X_d(\nu) \xrightarrow{\text{TDFT}^{-1}} x[n] = \oint_0^1 X_d(\nu)\, e^{2\pi j \nu n}\, d\nu,$$

där $x[n]$ är en oändlig *talföljd numrerad med alla heltalen* och $X_d(\nu)$ är en 1-*periodisk* funktion, definierad över den *reella talmängden.*



4. Diskreta fouriertransformen (DFT):

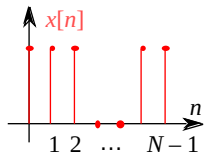
$$x[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi j nk/N},$$

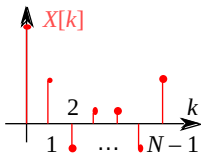
med invers $$X[k] \xrightarrow{\text{DFT}^{-1}} x[n\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k]\, e^{2\pi j kn/N},$$

där $x[n]$ och $X[k]$

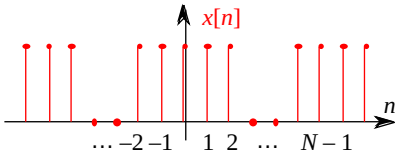
antingen är *följder av ändligt många tal*, n och $k = 0, 1, \ldots, N-1$

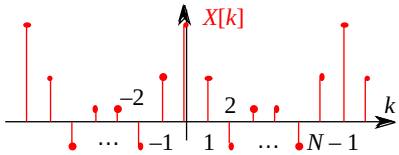
eller *N-periodiska oändliga talföljder*, n och $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$





eller





Kommentarer.

1. Variablerna n resp k i talföljderna är nummervariabler – de är dimensionslösa storheter. Däremot härrör de i signalteoretiska sammanhang från tid- eller frekvensrelaterade ting. Exempelvis kan $x[n]$ vara signalvärdet i den n:te samplingspunkten från en sampling av en tidskontinuerlig signal $x(t)$, $x[n] = x(nT)$, där T är samplingsintervallet. Vilken relation man har till en tidsskala beror då att T:s värde.

   På motsvarande sätt är X_k värdet av den k:te frekvensen i spektret till en periodisk funktion – vilken frekvens det rör sig om beror av funktionens period P, $f_k = k/P$.

2. Ovan har beteckningarna från Hj används. Med OW:s beteckningskonventioner skrivs diagrammen istället:

$$x(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(j\omega),$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{FS}} a_k,$$

$$x[n] \xrightarrow{\text{TDFT}} X(e^{j\omega}),$$

och $$x[n] \xrightarrow{\text{DFT}} a_k \left(= \frac{1}{N} X[k]\right)$$

där ω står för vinkelfrekvensen, $\omega = 2\pi f$. ♦

Det är viktigt att hålla i minnet att de olika fouriertransformerna, matematiskt sett, rätt och slätt är transformationer mellan tre sorts ting – oavsett hur de betecknas – nämligen:

1° komplexvärda generaliserade funktioner definierade över den reella talmängden,

2° komplexvärda talföljder, numrerade med hela heltalsmängden,

3° komplexvärda talföljder med ett ändligt antal element.

Dualitet

Man har enligt integral- och summationsformlerna för de olika transformerna att

$$x(t) \xrightarrow{\mathrm{FT}} X(f) \quad \Leftrightarrow \quad X(t) \xrightarrow{\mathrm{FT}} x(-f),$$

$$x(t) \xrightarrow{\mathrm{FS}} X_k \quad \Leftrightarrow \quad X_n = x[n] \xrightarrow{\mathrm{TDFT}} x(-P\nu) = X_{\mathrm{d}}(\nu),$$

speciellt om $P = 1$:

$$x(t) \xrightarrow{\mathrm{FS}} X_k \quad \Leftrightarrow \quad X_n = x[n] \xrightarrow{\mathrm{TDFT}} x(-\nu),$$

$$x[n] \xrightarrow{\mathrm{TDFT}} X_{\mathrm{d}}(\nu) \quad \Leftrightarrow \quad X_{\mathrm{d}}(t) \xrightarrow{\mathrm{FS}} x[-k],$$

$$x[n] \xrightarrow{\mathrm{DFT}} X[k] \quad \Leftrightarrow \quad X[k] \xrightarrow{\mathrm{DFT}} N\,x[-n].$$

Fenomenet kallas *dualitet*. F och DFT är självduala medan FS och TDFT är varandras dualer. Iakttagelserna ökar användbarheten hos tabeller med transformer. Om t.ex. en tabell för TDFT omtalar att

$$a^n\,u[n] \xrightarrow{\mathrm{TDFT}} \frac{1}{1 - a\cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}}, \text{ då } |a| < 1,$$

så följer av detta att

$$\frac{1}{1 - a\cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}t}} \xrightarrow{\mathrm{FS}} a^{-k}\,u[-k], \text{ då } |a| < 1.$$

Av de fyra transformerna kan den första (FT) ses som den mest generella – de andra tre kan uppfattas som specialfall denna.