Institutionen för Matematik
KTH

SF1634, Differentialekvationer II.
Obligatorisk inlämningsuppgift, VT 2007 för T2.

Godkänd uppgift ger 3 högskolepoäng. Om den lämnas in senast *den 26 mars 2008* så ger den dessutom 1 bonuspoäng till den ordinarie tentan i april och till omtentan i juni 2008. Arbetet skall utföras i grupp om två eller individuellt.

I problemet nedan finns ett antal parametrar, T_1, T_u, T_k, t_1 och d. Dessa skall du beräkna ur ditt födelsedatum, ååmmdd, (eller ett av era om ni arbetar i par) enligt följande:

T_1 = 40 + åå/10 + mm, T_u = 165 + dd/3, T_k = åå/10, t_1 = 60 + mm, d = (30 + mm)/100.

Bestämning av stektid

Scenario: Osquarulda skall tillaga en påskskinka av det större slaget i ugnen men saknar tyvärr erfarenheter på området. Någon kokbok finns för tillfället inte åtkomlig och telefonförbindelserna har havererat (stormskador på det fasta nätet och obefintlig täckning på det mobila), så att googla eller på annat sätt hoppas få hjälp från omvärlden är inte att tänka på. Däremot fungerar elförsörjningen – ugnen kan användas.

Huvudproblemet är hur länge steken bör vistas i ugnen. För att kunna komma med en vettig gissning för hur man skall gå till väga, försöker Osquarulda sig på en förenklad matematisk modell för situationen:

Det hela är uppenbarligen ett värmeledningsproblem. Om man tänker sig att skinkans värmeledningsförmåga och värmekapacitet är desamma i alla skinkans delar och

$$u(x, y, z, t)$$

är skinkans temperatur [°C] i punkten (x, y, z) [m] vid tiden t [min], så måste denna funktion uppfylla värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad [1]$$

där α [m^2/min] är en materialkonstant (noga taget $= \frac{k}{c\rho}$, där k är värmeledningstalet och c värmekapaciteten och ρ densiteten). Osquaruldas farbror – en gammal kyltekniker – som också finns på plats vill minnas att α-värdet för biologiskt material brukar vara av storleksordningen $5\cdot 10^{-5}$ [m^2/min].

Skinkan är förhållandevis rund och fin, så som en grov approximation låter Osquarulda den vara ett homogent klot i modellen. Ugnen, som är av god kvalitet, kan förväntas värma lika mycket från alla håll så u:s nivåytor (isotermerna) bör rimligtvis vara koncentriska sfäriska ytor med centrum i skinkans medelpunkt. Det är därför av intresse att man söker lösningar på formen

$$u(x, y, z, t) = u(r, t),$$

där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ och (x, y, z)-rummets origo placerats i skinkans medelpunkt.

Med hjälp av kedjeregeln och en del kalkyl lyckas Osquarulda transformera ekvationen [1] till

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}. \text{ (1} \qquad [2]$$

Osquarulda tror sig veta att en skinkstek är lagom stekt om dess temperatur längst in är 77°C. Skinkan har förvarats i ett kylskåp där den legat ett bra tag och kylskåpstermometern visar på T_k°C. Hon ställer in den i ugnen som håller temperaturen T_u°C och finner med hjälp av en stektermometer att temperaturen i centrum efter t_1 minuter är T_1°C. Med ledning av detta vill hon veta hur lång tid det tar tills skinkan är färdig.

---

1 Hade Osquarulda haft tillgång till handboken β eller liknande, så hade hon kunnat slå upp hur Laplaces operator ser ut i sfäriska koordinater, men hon lyckades bra utan sådana hjälpmedel också.

Din uppgift är att

— fullborda modellen utifrån ekvationen [2] genom att ställa upp relevanta begynnelse- och randvillkor,

— lösa PDE:n exakt med hjälp av variabelseparationsmetoden,

Några tips:

- Du kan behöva omdefiniera temperaturskalan, så att du får ett homogent randvillkor.
- Osquarulda fick en besvärlig ODE på vägen,

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \lambda R = 0,$$

men hon fick en snilleblixt och lyckades lösa den genom att sätta $rR = v$ och därigenom få en mycket enklare differentialekvation i $v(r)$.

— bestämma ett (i modellen) exakt uttryck i form av en serie för temperaturen $u(0, t)$ i skinkans centrum som funktion av tiden.

— med ledning av att α-värdet för biologisk materia kan antas vara av storleksordningen $5 \cdot 10^{-5}$ [m^2/min], trunkera serien för $u(0, t)$, så att relativa felet inte är större än c:a 15% om $t \geq t_1$.

Ett tips:

- Serien för $u(0, t)$ kommer att vara alternerande – dvs. varannan term är > 0 och varannan < 0 – och termernas belopp avtar mot 0. Generellt gäller för sådana serier att deras värde ligger mellan värdet av den första och summan av de två första termerna.

— beräkna när skinkan uppnått de önskade 77°C,

— rita grafer (med hjälp av något lämpligt matematikprogram) över hur temperturfördelningen blir inom skinkan vid 5 olika tidpunkter, jämnt fördelade över det tidsintervall som skinkan ligger i ugnen,

— bestämma värdet på ”materialkonstanten” α mer noggrannt, om man vet att skinkans diameter är d [m].

Presentation av lösningen

Lösningen skall ges i form av en rapport. Den skall vara organiserad på det sätt som är brukligt för tekniska och vetenskapliga publikationer. Det viktigaste med rapporten är att en läsare ska kunna återskapa dina resultat utifrån rapporten. Din rapport skall kunna förstås exempelvis av en kamrat som läst den här kursen, men som inte känner till just det här problemet innan.

Rapporten skall vara skriven på svenska eller engelska. Vid granskningen ställs krav på såväl pedagogisk framställning, sakinnehåll, layout som språkliga kvaliteter.

Arbetet skall utföras individuellt eller i grupp om två. Rapporten får alltså bara ha *en eller maximalt två författare* och att indata (födelsedagen) är hämtad från någon an författarna.

Rapportens innehåll

Rapporten *skall* åtminstone innehålla följande moment:

1. Beskrivning av problemet.

2. Uppställning av problemets randvillkor.

3. Bestämning av ett exakt uttryck för temperaturen $u(r\,,t)$ i form av en oändlig serie

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, R_n(r)\, T_n(t),$$

där C_n är oberoende av r och t.

Speciellt skall ett serieuttryck för temperaturen i centrum, $u(0, t)$, bestämmas.

4. Utredning av var serien lämpligen trunkeras, dvs. hur N skall väljas i

$$\tilde{u}_N(r,t) = \sum_{n=1}^{N} C_n\, R_n(r)\, T_n(t),$$

för att approximationen $u(r,t) \approx \tilde{u}_N(r\,,t)$ skall vara acceptabel för $t \geq t_1$.

5. Beräkning av tidpunkten då skinkan skall tas ur ugnen.

6. Plottar av grafer för $\tilde{u}_N(r\,,t)$ som funktion av r vid 5 tidpunkter jämnt fördelade över det tidsintervall som steken ligger i ugnen.

7. Beräkning av materialkonstanten α.

Examination

För godkänt rapport krävs, förutom innehållslig korrekthet, och vad som sagts ovan om rapportens innehåll,

- att rapporten inklusive figurer är maximalt 5 sidor lång,
- att rapporten och bedömningsmallen (bifogas som sista sida i det här dokumentet) skall vara ihophäftad, bedömningsmallen överst,
- att rapportskrivning sker enskilt eller parvis och att indata hämtas från någon av författarna,
- att titel, författare och namnteckning(ar), samt folkbokföringsnummer anges överst på sid 1 i rapporten,

För godkänd hemuppgift krävs,

- godkänd rapport,
- godkänd muntlig redovisning av rapporten.

Den muntliga redovisningen kommer att ske gruppvis efter rapportens godkännande.

Om man vill kunna tillgodoräkna sig 1 bonuspoäng på årets tentor, så måste en väl utarbetad rapport lämnas in senast den 26 mars. Den lämnas till kursledaren eller läggs i institutionens brevlåda i trapphuset strax bredvid innerdörrarna vid ingången Lindstedtsvägen 25.

De kan också postas. *ej e-postas*, till
Eike Petermann, Institutionen för matematik, KTH, 100 44 Stockholm.

Rapporterna kommer att tilldelas betyget E (godkänt) eller Fx (underkänt.med rätt till komplettering)

Är rapporten underkänd kan den alltså kompletteras och revideras samt lämnas in en andra gång senast den 5 maj 2008. Notera att rapporter inlämnade efter 26 mars kommer att behandlas först efter detta majdatum.

Institutionen för Matematik
KTH

Bedömningsmall för den obligatoriska hemuppgiften
Differentialekvationer II, SF1634 för T2, VT08

Endast uppgifterna i denna ruta fylls i:

Titel:..

Författare 1:..

Författare 2:..

	G		U	
		≤ 5 sidor	> 5 sidor	
Rapportens längd i sidor?		☐	☐	
		≤ 2 st	> 2 st	
Antal författare?		☐	☐	
	ja	oftast	ibland	nej
Upplägget/språket lätt att följa?	☐	☐	☐	☐
	ja	de flesta	ett fåtal	nej
Resultat finns?	☐	☐	☐	☐
	ja	de flesta	ett fåtal	nej
Resultaten korrekta?	☐	☐	☐	☐
	ja	oftast	nej	framgår ej
Används de matematiska hjälpmedlen på rätt sätt?	☐	☐	☐	☐

	G	U	
Första granskning	☐	☐	Sign:

....

	G	U	
Andra granskning (vid **U** ovan)	☐	☐	Sign:

Godkänd

Signatur: