Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning, matematisk analys (5B1304), den 29/5 2002, kl 8^{00}–13^{00}.

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, Kreyszig och kurslitteratur från tidigare matematikkurser, föreläsningsanteckningar samt räknedosa utan ”Computer Algebra System” (= automatisk formelbehandling).
Gamla tentamina med lösningar är inte tillåtna.

Fordringar:

	3	4	5
Betyg:	3	4	5
Minimipoäng totalt:	12	16	22
Minsta antal uppgifter med ≥ 2p:	3		
Min.poäng sammanlagt på uppgifterna 1, 2, 3, 4 resp 5, 6, 7:	3	4	4

Om Du använder resultat från β så bör sidhänvisning *och upplagenummer* av β anges!

1. Ekvationen

$$(\sin^2 x)\, y'' - (\sin 2x)\, y' + (2 - \sin^2 x)\, y = r(x)$$

har för $r(x) = 0$ bland annat lösningarna $y = \sin x$ och $y = x \sin x$. (Detta behöver inte verifieras.)

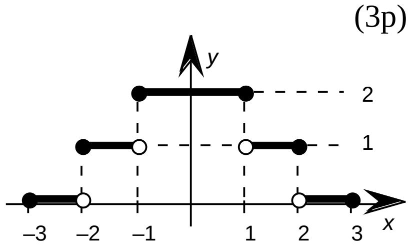
Beräkna för $r(x) = \sin^3 x$ ekvationens allmänna lösning. (3p)

2. Uttryck den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 2y' + \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} + 1\right) y = 0,\ x > 0,$$

med hjälp av Besselfunktioner. (3p)

3. Funktionen $f(x)$ har perioden 6, dvs. $f(x + 6) = f(x)$ för alla x, och dess graf består av räta linjestycken enligt figuren här bredvid. Utveckla $f(x)$ i fourierserie. (3p)
(Utnyttja gärna resultat från tabellverk.)



4. Problemet

$$(e^{2x} y')' + \lambda e^{2x} y = 0,\ y(0) = y(\pi) = 0,\ 0 \le x \le \pi,$$

är av Sturm-Liouvilletyp. (Behöver ej verifieras.)

a. Bestäm problemets egenvärden och egenfunktioner. (3p)

b. Låt egenfunktionerna betecknas med $y_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, och $f(x)$ vara en på intervallet $0 \le x \le \pi$ kontinuerlig funktion, för vilken

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, y_n(x),\ 0 < x < \pi.$$

Ange hur koefficienterna c_n, beräknas ur funktionerna f och y_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Det sökta sambandet bör anges som en integralformel där integralerna så långt möjligt har förenklats. (3p)

Var god vänd!

5. Den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2x\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

har en lösning som uppfyller villkoret $u(0, t) = e^{-2t}$. Bestäm den lösningen med hjälp av en variabelseparationsansats. (3p)

6. Beräkna med hjälp av residuumkalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{(1 + x^2)(4 + x^2)}\,dx, \text{ där } \omega \text{ är en reell konstant} > 0.$$

Svaret skall anges på reell form. (3p)

7. Låt $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^{\alpha}}$, där $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ och $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ och α en reell konstant.

a. Verifiera genom direkt beräkning att rot $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, då $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$. [1] (3p)

b. Bestäm för alla α-värden en potentialfunktion till $\boldsymbol{F}$. (3p)

1 rot $\boldsymbol{F}$ = curl $\boldsymbol{F}$.

Lycka till!