Institutionen för matematik
KTH

**Tentamensskrivning, Signaler och system I, för E2 och IT2 (5B1209)
den 25 augusti 2003 kl 14^{00} – 19^{00}.**

Hjälpmedel:
Zill-Cullen: Differential Equations with Boundary-Value Problems, Oppenheim-Willsky: Signals and Systems, Hjalmarsson: Kompletterande kursmaterial i signaler och system, BETA Mathematics Handbook, Formelsamling i Signalbehandling. Utdelat tryckt (eller via kurshemsidan nedladdat) föreläsningsmaterial. Räknedosa utan program.
Fordringar: 24p, 32p respektive 40p räcker för betygen 3, 4 respektive 5.

1. a. Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$(1-x^2)y' - 2xy = 2x \qquad \text{[ekv1]}$$

för vilken $y(0) = 2$. Ange också det största intervall som lösningen är definierad i. (5p)

b. Har [ekv1] någon eller några lösningar som är definierade för *alla* reella x? Ange den eller dem i så fall. (3p)

2. a. Visa att polynomen $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ och $p_2 = 3x^2 - 1$ parvis är ortogonala på intervallet $-1 \le x \le 1$ med avseende på skalärprodukten

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bestäm också deras normer $\|p_0\|$, $\|p_1\|$ och $\|p_2\|$. (3p)

b. För vilka värden på konstanterna a_0, a_1 och a_2 i funktionen

$$g(x) = a_0p_0(x) + a_1p_1(x) + a_2p_2(x)$$

approximeras funktionen $f(x) = \mathrm{e}^x$ med ett så litet fel $\|f - g\|$ som möjligt?(3p)

3. a. Uttryck den tidsdiskreta fouriertransformen (TDFT:n) av följden:

$$y[n] = \begin{cases} \cos n\pi/6, & \text{då } |n| \le 3, \\ 0, & \text{då } |n| > 3. \end{cases}$$

med hjälp av trigonometriska funktioner. (4p)

b. Låt $u[n]$ vara den 12-periodiska fortsättningen av $y[n]$, d.v.s.:

$$u[n] = y[n], \text{ då } |n| \le 12 \text{ och } u[n] = u[n-12], \text{ för alla heltal } n.$$

Uttryck den tidsdiskreta fouriertransformen (DFT:n) av följden $u[n]$ med hjälp av trigonometriska funktioner. Ange vilken definition av DFT:n (Hjalmarssons eller Oppenheim-Willskys) som Du använder. (4p)

Var god vänd!

4. a. Beräkna fouriertransformen till den jämna funktionen

$$x(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-|t|}, & \text{då} \quad |t| < 1, \\ 0, & \text{då} \quad |t| \geq 1, \end{cases}$$

på reell form. (4p)

b. Låt $z(t)$ vara den 3-periodiska fortsättningen av $x(t)$, d.v.s.

$$z(t) = x(t), \text{då } -1 < t \leq 2 \text{ och } z(t) = z(t-3) \text{ för alla } t.$$

Bestäm z:s komplexa fourierserie. (4p)

5. Låt

$$\begin{cases} x_1'(t) &= & 2x_2(t) &+ 2x_3(t), \\ x_2'(t) &= - & x_2(t) &- x_3(t), \\ x_3'(t) &= & x_1(t). \end{cases}$$

a. Bestäm den allmänna lösningen till systemet. (8p)

b. Bestäm en lösning till systemet sådan att $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$ och att gränsvärdet

$$\lim_{t \to \infty} (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

är reellt. (2p)

6. En inkommande ljudsignal $x(t)$ störs av successiva ekon som ankommer med en konstant tidsfördröjning på 0,1 sek, d.v.s. den faktiskt inkommande signalen $y(t)$ är en linjär kombination av signalerna $x(t-n/10), n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Man vet också att ekona dämpas successivt med en fix faktor $a, 0 < a < 1$, d.v.s. det n:te ekot är $a^n x(t-n/10)$. Därmed är

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \, x(t - n/10),$$

Man vill kunna rekonstruera signalen $x(t)$ ur signalen $y(t)$ och tänker använda fouriertransformteknik för detta.

a. Uttryck utan summa- eller integraltecken $Y(\mathrm{j}\omega)$ (fouriertransformen av y) i $X(\mathrm{j}\omega)$ (fouriertransformen av x) och parametern a. (3p)

Om storheten a är okänd, så måste den först bestämmas. Ett sätt att förfara är att registrera den inkommande signal $y_{\text{test}}(t)$ som erhålls, då man sänder ett känt testljud, t.ex. ett normal-a (440Hz), av viss längd (här vald till 4 sek):

$$x_{\text{test}}(t) = \begin{cases} \sin 880\pi t, & \text{då} \quad |t| \leq 2, \\ 0, & \text{då} \quad |t| > 2. \end{cases}$$

b. Bestäm $X_{\text{test}}(\mathrm{j}\,\omega)$ och uttryck $Y_{\text{test}}(\mathrm{j}\,\omega)$ i a. (4p)

c. Beräkna $Y_{\text{test}}(\mathrm{j}\,880\pi)$ som funktion av a. Vilket närmevärde för a får man om man empiriskt vet att $|Y_{\text{test}}(\mathrm{j}\,800\pi)| \approx 6,5$? (3p)

Lycka till!