

Tentamensskrivning, matematisk analys (5B1304), den 23/8 2001, kl 8⁰⁰–13⁰⁰.

Hjälpmedel: Mathematics Handbook, Kreyszig och kurslitteratur från tidigare matematikkurser, föreläsningssanteckningar samt räknedosa utan "Computer Algebra System" (= automatisk formelbehandling).
Gamla tentamina med lösningar är inte tillåtna.

	Betyg:	3	4	5
Fordringar:	Minimipoäng totalt:	10	15	21
	Minsta antal uppgifter med 2p:	3		
	Min.poäng sammanlagt på uppgifterna 1, 2, 3, 4 resp 5, 6, 7:	3	3	4

1. Ekvationen $(1-x)y'' + xy' - y = 0$ har bland sina lösningar funktionerna $y = x$ och $y = e^x$. (detta behöver inte bevisas). Beräkna den allmänna lösningen till

$$(1-x)y'' + xy' - y = \frac{(1-x)^2}{x}. \quad (3p)$$

2. Bestäm ett närmevärde (fyra korrekta siffror räcker) för den minsta positiva konstant μ för vilken problemet

$$xy'' - y' + \mu^2 xy = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

har en icke-trivial lösning. (3p)

3. Funktionen $f(x)$ är 2-periodisk och ges i intervallet $-1 < x < 1$ av

$$f(x) = x(1 - |x|).$$

Bestäm fourierserieutvecklingarna av funktionerna $f'(x)$ och $f(x)$. (3p)

4. Verifiera att

$$x^2 y'' + 2x y' - 2y + x^2 y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

är ett Sturm-Liouvilleproblem och beräkna dess egenvärden och egenfunktioner. (5p)

5. Bestäm i området $1 < x, 0 < t$ den lösning $u(x,t)$ till den partiella differentialekvationen

$$x \frac{u}{x} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

som satisfierar $u(x,0) = u(x, \infty) = 0$ och $u(1,t) = \sin 2t$. (4p)

6. a. Vilka är polerna till funktionen $f(z) = \frac{\sin 2z}{z^2 + z + 1}$ och vilken ordning har de? (1p)

b. Beräkna $\int \frac{\sin 2x}{x^2 + x + 1} dx$. (3p)

7. Låt \mathbf{K} vara övre halvan av enhetsklotet: $\{(x,y,z); x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ och låt \mathbf{S} vara dess begränsningsyta. Beräkna yntegralen

$$\int_{\mathbf{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA,$$

\mathbf{S}

där $\mathbf{F} = (x^2 y, y + z, x^2 - yz)$. (3p)

Lycka till!