Uppgiftssamling 5B1493 , lektionerna 1 – 6

Lektion 1

4. (Räkning med oändliga decimalbråk)

Låt $x = 0,a_1a_2a_3\ldots\ldots a_n\ldots\ldots$
och $y = 0,b_1b_2b_3\ldots\ldots b_n\ldots\ldots$ (a_i och b_i siffror 0, 1, …, 9).

a. Kan Du beskriva något förfarande som säkert ger den n:te decimalen i talet $x + y$?

b. Kan Du beskriva något förfarande som säkert ger ett decimalbråk

$$z = 0,c_1c_2c_3\ldots\ldots c_n\ldots\ldots$$

som skiljer sig från $x + y$ med mindre än en godtyckligt föreskriven felgräns ε (> 0).

Lekt ion 2

Rosenlicht: Kap 1 sid 12, 1 – 5

Lektion 3

Övningar om heltalsaritmetik:

1. Visa utifrån Peanos axiom att
   varje tal n **N**, $n \neq 0$, har en ”närmaste föregångare”, dvs $n = m^+$ för något m **N.**

2. Visa utifrån Peanos axiom och definitionen av addition
   a. att $0 + n = n$ för alla n **N**
   b. att $n + m^+ = n^+ + m$ för alla n och m **N**
   c. kommutativa lagen för addition, dvs att $n + m = m + n$ för alla n och m **N**
   d. associativa lagen för addition, dvs. att
   $(n + m) + p = n + (m + p)$, för alla n, m och p **N**
   e. Annuleringslagen för addition, dvs för alla x, y och z **N** gäller att
   $x + z = y + z \qquad x = y$

3. Visa utifrån Peanos axiom och definitionen av multiplikation
   a. att $n \cdot 0^+ = n$, för alla n **N**,
   b. och med hjälp av kommutativa och associativa lagarna för addition att
   $(n + m)\cdot p = (n \cdot p) + (m \cdot p)$

4. Visa utgående från Peanos axiom, definitionerna och räknelagarna för addition och multiplikation, samt definitionerna av subtraktion och division,
a. $n - 0 = n$, för alla n **N**,
b. $n + (m - p) = (n + m) - p$
c. $n - (m - p) = (n - m) + p$
d. $n - (m + p) = (n - m) - p$
e. $\frac{0}{n} = 0$ för alla n **N**, $n \neq 0$ och $\frac{m}{0^+} = m$ för alla m **N**.
f. $n \cdot \frac{m}{p} = \frac{(n\,m)}{p}$
g. $\frac{n}{m} + \frac{p}{d} = \frac{((n \cdot d) + (m \cdot p))}{(m \cdot d)}$

5. Om α och β Z. Visa utgående från räknelagarna för **Z** (**Z1-9**) att
a. Om $\alpha = [(n, m)]$ n, m **N**, så är $-\alpha = [(m, n)]$.
b. $(-1)\cdot\alpha = -\alpha$
c. Låt subtraktion i **Z** *definieras* av $\alpha \triangleq \beta = \alpha + (-\beta)$. Visa att detta, för de tal i **Z** som svarar mot de naturliga talen **N**, överensstämmer med den subtraktion (**D–**) som användes i **N**.

Lektion 4 – 5

Övningar om funktionsbegreppet:

Rosenlicht: Kap 1, sid 12, 7 – 10.

F1. Vilka är funktionerna av typ $\{1,2,3\} \to \{0,1\}$

F2. Om **Y** består av två element och **X** en mängd (vilken som helst), försök beskriva vilka funktionerna av **X** → **Y** är med hjälp av begreppet delmängd.

F3. Finns det några funktioner av typ → **R** resp. **R** → ?

F4. Verifiera den associativa lagen för sammansättningsoperationen

F5. a. Om $f \circ g$ och $g \circ f$ existerar, vad kan då sägas om funktionernas typer?
b. Om f och g: **R** → **R** , $f(x) = e^x$ och $g(x) = x^2$. Vilka är då $(f \circ g)(x)$ och $(g \circ f)(x)$.

F6. Verifiera att om f : **X** → **Y** så är $f \circ i_{\mathbf{X}} = f$ och $i_{\mathbf{Y}} \circ f = f$.

F7. Verifiera att om f : **X** → **Y** är bijektion, så är $f^{-1} \circ f = i_{\mathbf{X}}$ och $f \circ f^{-1} = i_{\mathbf{Y}}$.
Och omvänt: Om $g \circ f = i_{\mathbf{X}}$ och $f \circ h = i_{\mathbf{Y}}$ för några funktioner g och h, så är f en bijektion och $g = h = f^{-1}$.

F8. Verifiera att f: **X** → **Y** är en injektion om och bara om $f \circ g = f \circ h$ $g = h$.
Och att f: **X** → **Y** är en surjektion om och bara om $g \circ f = h \circ f$ $g = h$.
(Underförstått att f, g och h har valts så att de angivna sammansättningarna är meningsfulla.)

Övningar om relationer

R1. Verifiera att relationen **G** **N** × **N** definierad av

$$a\mathbf{G}b \Leftrightarrow \text{ ekvationen } a \cdot x = b \text{ har en lösning i } \mathbf{N},$$

är en ordningsrelation. Är **N** därigenom totalordnad? Finns det något tal i **N** som är "mindre än" alla andra (dvs. ett n **N** för vilket $n|a$ för alla a **N**? Finns det något tal i **N** som är "större än" alla andra (dvs. ett m **N** för vilket $a|m$ för alla a **N**?

R2. Är relationen "vara (hel)syskon till" symmetrisk? reflexiv? transitiv?
Hur blir det för relationerna "vara barn till min mamma och pappa" resp. "vara kusin till"?

Övningar om grupper:

G1. Verfiera att mängderna med räknesätten exemplen 1 – 9 i det utdelade papperet om grupper verkligen är grupper resp. abelska grupper.

G2. Varför är (**N**, +) och (**N**, ·) inte några grupper?

G3. Varför är (**Q**,·) inte någon grupp?

G4 Varför är mängden av vektorer i $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) med räknesättet ”skalärprodukt” inte någon grupp?

G5. Varför är vektorerna i $\mathbf{R}^3$ med räknesättet ”kryssprodukt” inte någon grupp?

G6. Låt **M** vara mängden som består av de båda talen ±1. Om man som räknesätt tar ”multiplikation”, är (**M**,) då en grupp?

G7. Verifiera att (**M**, o) är en grupp om **M** är mängden av bijektioner **X** → **X** och o är sammansättningsoperationen. Är gruppen abelsk?

G8. Låt **X** i föregående uppgift vara mängden {0, 1}. Vilka är bijektionerna? Skriv upp gruppens ”multiplikationstabell”. Är gruppen abelsk?

G9. Låt **X** i stället vara mängden {0, 1, 2}. Vilka är bijektionerna? Skriv upp gruppens ”multiplikationstabell”. Är gruppen abelsk?

Övningar om ringar:

Ri1. Verifiera att påståendena i ex 1 – 4 ovan är riktiga. Vilka av dessa ringar är kommutativa och vilka har en enhet?

Ri2. Är (**N** + ; ·) en ring?

Ri3. Är ($\mathbf{Q}_+$ + ; ·) en ring? $\mathbf{Q}_+$ är mängden av de positiva rationella talen.

Övningar om kroppar:

K1. Verifiera att om $\mathbf{M} = \{a + b\sqrt{2}$, a och b $\mathbf{Q}\}$, så är (**M**, + , ·) en kropp.

K2. Verifiera att restklasserna mod 2 med räknesätten addition och multiplikaion är en kropp.

K3. Utgör restklasserna mod 3, resp mod 4 med räknesätten addition och multiplikation kroppar?

K4 För vilka heltal $n \geq 2$ utgör restklasserna mod n med räknesätten addition och multiplikation en kropp?

Övningar om reella tal:

AEE Övn 5.1 – 5.4

Rosenlicht: Kap 2. 6 – 11, 14 - 15.
(Ersätt ledningen i uppgift 11 med
”First find a positive integer n such that $a > 1 + \frac{1}{n}$ and than prove that $a^m > 1 + \frac{m}{n}$ for all integers m.”

Lektion 6

L1. Skriv upp definitioner för + och $\lambda\cdot$, så att $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum. (n står för något heltal ≥ 2.)

L2 Verifera att $(\mathbf{R}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum om + och $\cdot$ står för den vanliga additionen och multiplikationen.

L3. Verifera att $(\{0\}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum om + och $\cdot$ står för den vanliga additionen och multiplikationen. (Detta ”triviala” rum kallas *nollrummet*.)

L4. Låt **L** vara mängden av alla funktioner $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ med

addition $(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$ och

multiplikation med skalär: $(\lambda\cdot f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\cdot f(x)$.

Verifiera att $(\mathbf{L}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum.

L5. Låt **P** vara mängden av alla polynom $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Verifiera att $(\mathbf{P}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum om + och $\cdot$ definieras som i exempel 5 ovan.

L6. Samma som föregående uppgift fast med följande delmängder av **P**
a. {polynomen av grad $\leq n$}, där n något naturligt tal.
b. {polynomen av grad $= n$}, där n något naturligt tal.
c. {alla polynom p för vilka $p(\pi) = 0$}
d. {alla polynom p för vilka $p(0) = \pi$}
e. {alla polynom p för vilka $p´(2) = 0$, där $p´$ är p:s derivata

L7. Låt $(\mathbf{L}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ vara något linjärt rum och låt $\mathbf{M} \quad \mathbf{L}$.
Visa att $(\mathbf{M}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum om och endast om följande båda villkor är uppfyllda:

I. $\boldsymbol{a} \quad \mathbf{M}$ och $\boldsymbol{b} \quad \mathbf{M} \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad \mathbf{M}$,

II. $\boldsymbol{a} \quad \mathbf{M}$ och $\lambda \quad \mathbf{R} \quad \lambda\cdot\boldsymbol{a} \quad \mathbf{M}$.

Man säger att en vektor $\boldsymbol{a}$ är en *linjär kombination* av vektorerna $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ om

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \lambda_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{b}_k .$$

Vidare: En mängd **M** av vektorer sägs vara *linjärt oberoende* om ingen av vektorerna är en linjär kombination av de övriga i **M**. Det maximala antalet linjärt oberoende vektorer i **L** kallas rummets *dimension*. (Om denna inte är ett naturligt tal så säger vi att dimensionen är oändlig.)

L8. Verifiera att alla vektorer i ett rum av dimension 1 kan skrivas på formen $\lambda\cdot\boldsymbol{e}$ där $\boldsymbol{e}$ är en på förhand vald vektor $\neq \mathbf{0}$.

L9. Vilka är dimensionerna på de linjära rummen i uppgifterna L1 - L6?

L10 (Ett underligt(?) vektorrum)

Låt $\mathbf{R}_+$ = de positiva reella talen och definiera två räknesätt och :
$a \quad b = ab$ (där a och $b \quad \mathbf{R}_+$),
$\lambda \quad a = a^\lambda$ (där $\lambda \quad \mathbf{R}$ och $a \quad \mathbf{R}_+$)

Verifiera att $(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}, \quad , \quad)$ är ett linjärt rum och att dess dimension = 1.

Två linjära rum $(\mathbf{L}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ och $(\mathbf{M}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är *isomorfa* (”i allt väsentligt lika”) om det finns en bijektion $\phi : \mathbf{L} \to \mathbf{M}$ sådan att

I. $\phi(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \phi(\boldsymbol{a}) + \phi(\boldsymbol{b})$ och
II. $\phi(\lambda\cdot\boldsymbol{a}) = \lambda\cdot\phi(\boldsymbol{a})$. (1

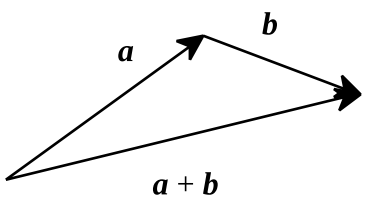
1 Bijektionen är ”kompatibel” med räknesätten.
På motsvarande sätt definierar man isomorfi mellan andra algebraiska strukturer (grupper ringar, kroppar……).

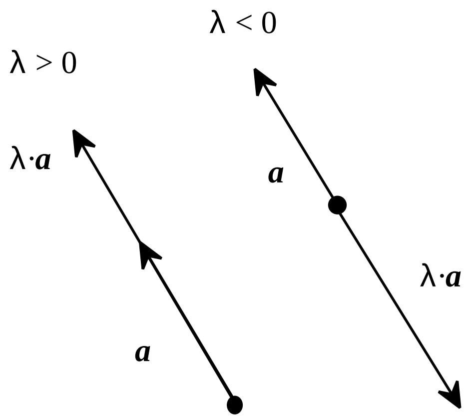
L11. Visa att alla vektorer i ett linjärt rum av dimension 1 är isomorfa. Ange någon isomorfi
Det linjära rummet mellan (**R**, **R**, + ,·) och det linjära rummet (**R**$_+$, **R**, ,) i uppg L10.

Mera allmänt gäller att alla rum med samma dimension n (n **N**) är isomorfa.

L12. Ange någon bijektion mellan de linjära rummen i L2 och L10, kompatibel med räknesätten.

L13 Ange någon bijektion mellan det linjära rummet (**R**, **R**, + ,·) och rummet av pilar i planet med räknesätten





λ·***a*** är |λ| gånger längre än ***a***