Uppgiftssamling 5B1493 , lektionerna 7 – 12

Lektion 7

Rosenlicht Ch 3, §1 - 4 (uppgifterna står på sid 61ff): 1, 3, 4, 5, 9 – 17, 22, 23, 24

Lekt ion 8

Några exempel på metriska rum:

Ex 8.1. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^n$ och $d(\boldsymbol{x}, \mathbf{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, där $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2}$.
(Den så kallade *euklidiska* metriken.)

Ex 8.2. Varje delmängd av ett metriskt rum med samma metrik som rummets.

Ex 8.3. $\mathbf{E}$ en godtycklig mängd och $d(p, q) = 1$ om $p \neq q$ och annars $= 0$.
(Den så kallade *diskreta* metriken)

Ex 8.4. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^2$ och $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Ex 8.5. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^2$ och $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max(|x_1 - y_1| , |x_2 - y_2|)$.

L8.1 Verifiera att om

$$\mathbf{M}_1 = \{(x,y) \quad \mathbf{R}^2 ; x \geq 0 \quad y > 0\}$$

så utgörs de inre punkterna av:

$$\mathbf{M}_2 = \{(x,y) \quad \mathbf{R}^2 ; x > 0 \quad y > 0\}$$

och randpunkterna av de icke-negativa halvaxlarna:

$$\mathbf{M}_3 = \{(x,0) \quad \mathbf{R}^2; x \geq 0 \} \quad \{(0,y) \quad \mathbf{R}^2; y \geq 0\}$$

Rita figur!

L8..2 Verifiera att för mängderna i övning 8.1 ovan är

$\mathbf{M}_2$ öppen

$\mathbf{M}_3$ sluten och

$\mathbf{M}_1$ varken öppen eller sluten!

L8.3 Visa att mängden av randpunkter till en delmängd $\mathbf{M}$ till ett metriskt rum alltid är sluten.

L8.4 Verifiera att

$\mathbf{M}_4 = \{(x,y) \quad \mathbf{R}^2 ; 1 \leq xy \leq 2, x \geq 0\}$ är sluten men obegränsad,

$\mathbf{M}_5 = \{(x,y) \quad \mathbf{R}^2 ; 0 < x , 0 \leq y , x + y \leq 1\}$ är begränsad men inte kompakt och

$\mathbf{M}_6 = \{(x,y) \quad \mathbf{R}^2 ; 0 \leq x , 0 \leq y , x + y \leq 1\}$ är kompakt

L8.5 Vilka är de öppna respektive slutna mängderna i det metriska rum som man får då $\mathbf{R}^2$ förses med den diskreta metriken definierad i ex 8.3? Vilka är de begränsade mängderna?
Vilka följder i detta metriska rum är konvergenta?

L8.6 Hur ser ”enhetsskivorna” $\{\boldsymbol{x} \quad \mathbf{R}^2; d(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) \leq 1\}$, dvs–motsvarigheten till enhetscirkeln,ut för de båda metrikerna som beskrivs i exemplen 8.4. och 8.5 ovan. Rita!

L8.7 Om $\mathbf{R}^2$ förses med metrikerna som beskrivs i exemplen 8.1, 8.4 och 8.5 ovan så får man tre olika metriska rum. Verfiera att trots detta klasserna av öppna mängder, slutna mängder, respektive begränsade mängder är desamma i alla tre fallen. Verifiera också att om

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$$

med avseende på en av dessa metriker, så gäller detsamma med avseende de andra två metrikerna.

En *norm* i ett linjärt rum **E** är en funktion $|\cdot|$ av typen $\mathbf{E} \to \mathbf{R}$, som uppfyller

N1. $|\boldsymbol{x}| > 0$ för alla $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ och $= 0$ för $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,

N2. $|\lambda \boldsymbol{x}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{x}|$ för alla skalärer λ och alla vektorer $\boldsymbol{x}$,

N3. $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ för alla vektorer $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$.

L8.8 Verifiera att funktionerna $d(\boldsymbol{x}, \mathbf{0})$ i exemplen 8.1, 8.4 och 8.5 är normer på vektorrummet $\mathbf{R}^2$.

L8.9 Verifiera att om $|\cdot|$ är en norm på vektorrummet **E**, så är $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ en metrik på rummet.

L.8.10 Låt $(\mathbf{E}, d)$ vara ett godtyckligt metriskt rum. Verifiera att p är en hopningspunkt till delmängden **M** om och endast om p är randpunkt till $\mathbf{M} - \{p\}$.

Rosenlicht, kap 3 (sid 64): Uppg 26, 30, 32

Lektion 9

L9.1 För varje p_0 **E** är funktionen $p \to d(p, p_0)$ av typen $\mathbf{E} \to \mathbf{R}$. Verifiera att den är kontinuerlig.

L9.2 Låt **E** och **E'** vara metriska rum. Verifiera att $\mathbf{E} \times \mathbf{E'}$ är ett metriskt rum om metriken D definieras av

$$D\big((p, p'), (q, q')\big) = d(p, q) + d'(p', q')$$

L9.3 Verifiera att $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ $(p, q) \to d(p, q)$ $\mathbf{R}$ är en kontinuerlig funktion om $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ görs till ett metriskt rum som i uppgift 9.2

L9.4 Ge exempel på en funktion $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sådan att

a. $\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x, y) \right)$ och $\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x, y) \right)$ existerar men är olika.

b. $\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x, y) \right)$ och $\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x, y) \right)$ existerar och är lika, men att $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ inte existerar.

L9.5 Låt f vara följande reellvärda funktion av två reella variabler:

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x}, & \text{då } x \neq 0, \\ 0, & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

Vad gäller om gränsvärdena

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x, y) \right), \quad \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x, y) \right) \text{ respektive } \lim_{(x,\ y) \to (0,\ 0)} f(x, y)?$$

Ytterligare uppgifter: Rosenlicht kap 4: 1, 2, 9, 10.

Lektion 10

Rosenlicht: Kap 4: 11, 14, 16, 26 - 30.

L10.1 Låt **M** vara följande delmängd i planet $\mathbf{R}^2$:

$\{(x,y);\ y = \sin \frac{1}{x},\ \text{och } x > 0\} \quad \{(x,0);\ x \leq 0\}$.

Verifiera att den är sammanhängande men inte bågvis sammanhängande.

L10.2 Bevisa:

E är bågvis sammanhängande och f kontinuerlig $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$

E bågvis sammanhängande.

Lektion 11

L11.1 Avgör vilka av följande funktioner som är likformigt kontinuerliga i de angivna intervallen:

a. $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x$, b. $f(x) = \ln x$, $0 < x$,

c. $f(x) = \sin x$. x $\mathbf{R}$.

Ledningar: a. Visa t. ex. först att $\sqrt{x + \delta} - \sqrt{x} \leq \sqrt{\delta}$ om x och $\delta \geq 0$.

b. Visa t. ex. först att för alla $\delta > 0$ gäller att $\ln (x + \delta) - \ln x \to \infty$ då $x \to 0+$.

c. Användbara trigonometriska samband:

$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$ och $|\sin x| \leq |x|$.

L11.2 a. Verifiera, att om funktionen f är likformigt kontinuerlig på i mängden **M** så måste den också vara likformigt kontinuerlig på varje delmängd av **M**.
b. Verifiera, att om funktionen f är likformigt kontinuerlig i mängderna $\mathbf{M}_1$ och $\mathbf{M}_2$ så måste den också vara likformigt kontinuerlig mängden $\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2$.

L11.3 Visa att om $f(x)$ och $g(x)$ är reellvärda och likformigt kontinuerliga på **E** så är också $f(x) + g(x)$ likformigt kontinuerlig på **E**.
Gäller samma sak för funktionerna $f(x) \cdot g(x)$ respektive $f \circ g(x) = f(g(x))$?
Om $f(x)$ dessutom är inverterbar, måste då även $f^{-1}(x)$ vara likformigt kontinuerlig i sitt definitionsintervall?

L11.4 Visa att om $f(x)$ är kontinuerlig för alla reella x och om funktionen har reella gränsvärden då $x \to \infty$ och $x \to -\infty$, så är den likformigt kontinuerlig på **R**.

L11.5 Visa att om $f(x)$ är en funktion av en reell variabel, periodisk (dvs. det finns något tal $P > 0$ sådant att $f(x - P) = f(x)$ för alla $x \in$ **R**) och kontinuerlig på **R**, så är f också likformigt kontinuerlig på **R**.

Ledning: Verifiera att $\sup\limits_{d(x,y) \le \delta} d(f(x), f(y)) = \max\limits_{\substack{d(x,y) \le \delta \\ 0 \le x, y \le P}} d(f(x), f(y))$

och utnyttja att intevallet $0 \le x \le P$ är kompakt.

L11.6 Visa att om $f(x)$ är en funktion av en reell variabel, likformigt kontinuerlig i ett *begränsat* (men inte nödvändigtvis slutet) intervall, så är också funktionen begränsad (dvs det finns en konstant K sådan att $|f(x)| \le K$ för alla x i definitionsintervallet).

L11.7 Bestäm för var och en av följande funktioner $f(x)$ de a för vilka f är likformigt kontinuerlig i intervallet $a < x$:

a. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ b. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$ c. $f(x) = e^{-x}$

Ledningar: a. Använd t.ex. resultatet från uppgift 11.4 ovan

b. Undersök först likformigheten i intervallen $a \le x \le 0$ (för olika a) resp. $0 \le x$

L11.8 Låt $f(x) = \sin(x^2)$, $-\infty < x < \infty$.

a. Bestäm samtliga nollställen.

b. Visa att det finns nollställen till f som ligger godtyckligt nära varandra.

c. Bestäm f:s kontinuitetsmodul och avgör om funktionen är likformigt kontinuerlig eller ej.

L11.9 Om $M(\delta)$ är en kontinuitetsmodul visa att

a. $M(\alpha + \beta) \le M(\alpha) + M(\beta)$ för alla α och $\beta > 0$.

b. $M(\delta) = \infty$ för alla $\delta > 0$ om $M(\delta_o) = \infty$ för något $\delta_o > 0$.

Dessutom:

Rosenlicht kap 4, sid 94, uppg 22, 23, 33 – 36, 39, 41, 43

Lektion 12

De följande övningarna går ut på att, *utifrån principerna I – XI* i lbladet till lektion 12 visa, att de ”vanliga” elementära funktionerna är kontinuerliga.

L12.1 Motivera varför alla polynom

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

är kontinuerliga funktoner $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

L12.2 Motivera varför alla rationella uttryck

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

är kontinuerliga funktioner.

L12.3 Härled, att om a_n och $b_m \neq 0$ för $r(x)$ i den föregående uppgiften, så är

$$\lim_{x \to \infty} r(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } m > n, \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{om } m = n, \\ \infty, & \text{om } m < n \text{ samt } a_n \text{ och } b_m \text{ har samma tecken,} \\ -\infty, & \text{om } m < n \text{ samt } a_n \text{ och } b_m \text{ har olika tecken.} \end{cases}$$

L12.4 Bevisa att de trigonometriska funktionerna sin x, cos x, tan x och cot x är kontinuerliga.
(Definitionerna av uttrycken ifråga liksom ”elementära” trigonometriska samband, som additionssatser, produksatser m.m. får anses bekanta (= tidigare visade).)

L12.5 Bevisa att de cyklometriska funktionerna arcsin x, arccos x, arctan x och arccot x är kontinuerliga.

L12.6 Bevisa att funktionen a^x (a konstant > 0) är kontinuerlig. (Potenslagarna får anses vara bekanta och likaså att funktionen $t \to \dfrac{a^t - 1}{t}$ är växande för alla t $\mathbf{R}$)

L12.7 Bevisa att $x \to \log_a x$, a en konstant > 0 och $\neq 1$, är en kontinuerlig funktion.

L12.8 Bevisa att $x \to x^\alpha$, där α är konstant och $x > 0$, är en kontinuerlig funktion.

L12.9 Vilka av funktionerna i uppgifterna L12.1 – 8 är likformigt kontinuerliga på hela **R**?