Matematiska Institutionen
KTH

Lösningsskisser, 5B1304, den 9/1 2002, kl 8^{00}–13^{00}.

1. Den givna homogena ekvationens allmänna lösning är:

$$y = Ax + B\cos x, \text{ där } A \text{ och } B \text{ är konstanter.}$$

En Wronskimatris till ekvationen är

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} x & \cos x \\ 1 & -\sin x \end{pmatrix}$$

Ansats $y = A(x)\,x + B(x)\cos x$ i den inhomogena ekvationen ger villkoret

$$\boldsymbol{W}\begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos x + x\sin x \end{pmatrix},$$

varav

$$\begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \boldsymbol{W}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos x + x\sin x \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} -\sin x & -\cos x \\ -1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos x + x\sin x \end{pmatrix},$$

där $\Delta = -x\sin x - \cos x$. Detta ger

$$A'(x) = \cos x,\; B'(x) = -x,$$

vilket är uppfyllt för $A(x) = \sin x$ och $B(x) = -x^2/2$. Allmän lösning till den inhomogena ekvationen: $y = x\sin x - (x^2\cos x)/2 + Ax + B\cos x$.

Begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 0$ ger sedan

Svar: $y = x\sin x - (x^2\cos x)/2$.

2. Ekvationen kan skrivas $x^2y'' + x^{-2}y = 0$ och är en transformerad Besselekvation. (Sätt i $x^2y'' + (a + 2bx^r)y' + [c + dx^{2s} - b(1 - a - r)x^r + b^2x^{2r}]y = 0$, $a = b = c = 0$, $d = 1$, $s = -1$, vilket ger $p = -1/2$.) Allmän lösning är:

$$y = x^{1/2}Z_{1/2}(x^{-1}) = A\sqrt{x}\,J_{1/2}(1/x) + B\sqrt{x}\,J_{-1/2}(1/x),$$

vilket också kan skrivas (jmfr sid 234 i kursboken):

$$y = A_1x\sin(1/x) + B_1x\cos(1/x).$$

Eftersom $\lim_{x\to\infty} x\sin(1/x) = 1$ och $x\cos(1/x)$.saknar gränsvärde då $x \to \infty$ så ger bivillkoren att $A_1 = 1$ och $B_1 = 0$.

Svar: $y = x\sin(1/x)$.

3. a. Man har $\sqrt{2\pi}\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-iwx}\,dx = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)\,e^{-iwx}\,dx =$

$$\left[(1 - x^2)\frac{e^{-iwx}}{-iw}\right]_{x=-1}^{x=1} + 2\int_{-1}^{1} x\frac{e^{-iwx}}{-iw}\,dx = 0 + 2\left[x\frac{e^{-iwx}}{(-iw)^2}\right]_{x=-1}^{x=1} + \frac{2}{w^2}\int_{-1}^{1} e^{-iwx}\,dx =$$

$$-\frac{2}{w^2}(e^{-iw} + e^{iw}) - \frac{2}{iw^3}(e^{-iw} - e^{iw}) = -\frac{4}{w^2}\cos w + \frac{4}{w^3}\sin w.$$

Svar: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\dfrac{4}{w^2}\cos w + \dfrac{4}{w^3}\sin w\right)$

b. Eftersom $g(x)$ är $2L$-periodisk så är des komplexa fourierserie av typen

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\pi kx/L},$$

där $2Lc_k = \int_{-L}^{L} g(x)\, e^{-i\pi kx/L}\, dx = [g(x) = 0 \text{ då } 1 \le |x| \le L] =$

$$= \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, e^{-i\pi kx/L}\, dx = [\text{Sätt för } k \ne 0,\ w = \pi k/L \text{ i integralen i 3a.}] =$$

$$= -\frac{4L^2}{(\pi k)^2} \cos\frac{k\pi}{L} + \frac{4L^3}{(\pi k)^3} \sin\frac{k\pi}{L}, \text{ dvs. } c_k = -\frac{2L}{(\pi k)^2} \cos\frac{k\pi}{L} + \frac{2L^2}{(\pi k)^3} \sin\frac{k\pi}{L}.$$

Slutligen för $k = 0$: $2Lc_0 = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}$, dvs. $c_0 = \frac{2}{3L}$.

Svar: $g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\pi kx/L}$, där $c_k = \begin{cases} -\dfrac{2L}{(\pi k)^2} \cos\dfrac{k\pi}{L} + \dfrac{2L^2}{(\pi k)^3} \sin\dfrac{k\pi}{L}, & \text{om } k \ne 0, \\ \dfrac{2}{3L}, & \text{om } k = 0. \end{cases}$

4. (Se (1) och (2) sidan 242.) Ekvationen är av formen

$$[ry']' + [q + \lambda p]y = 0,$$

med $r = 1$, $q = 0$ och $p = x^3$ och bivillkoren $y(0) = y(1) = 0$, $0 \le x \le 1$, är av formen $\begin{cases} k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \\ l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0 \end{cases}$ med $a = 0$, $b = 1$, $k_1 = l_1 = 1$, $k_2 = l_2 = 0$.

Problemet är alltså av Sturm-Liuovilletyp med viktsfunktion $p = x^3$.
Motsvarande ortogonalitetsrelation är därmed

$$f \perp g \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\, g(x)\, x^3\, dx = 0.$$

Speciellt för $f = 1$ och $g = x + a$: $f \perp g \Leftrightarrow \int_0^1 1\cdot(x + a)\cdot x^3\, dx = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{5} + a\frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{5}$ **: Svar**

5. *Metod I*: (Laplacetransformering)

Laplacetransformering med avseende på t ger:

$$x\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, s) - \left(s^2\tilde{u}(x, s) - s\tilde{u}(x, 0) - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, 0)\right) =$$

$$= x\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, s) - \left(s^2\tilde{u}(x, s) - \frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

vilket leder till den linjära diff.ekv. av 1:a ordningen:

$$x\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - s^2\tilde{u} = -\frac{1}{x^2}, \text{ där } s \text{ är en parameter.}$$

Integrerande faktor är $\exp(-s^2 \ln x) = x^{-s^2}$. Man får den ekvivalenta ekvationen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-s^2}\tilde{u}\right) = -\,x^{-s^2-3} \;\Leftrightarrow\; x^{-s^2}\tilde{u} = \frac{1}{s^2+2}\,x^{-s^2-2} + C.$$

Eftersom $\lim\limits_{s\to\infty} \tilde{f}(s) = 0$ för alla Laplacetransformer $\tilde{f}(s)$ så måste $C = 0$ och man får $\quad \tilde{u} = \dfrac{1}{s^2+2}\,x^{-2}$.

Återtransformering ger $u(x, t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{\sin\sqrt{2}t}{x^2}$ **: Svar**

Metod II: (Variabelseparation)

Ansats $u(x, t) = X(x)\cdot T(t)$ ger $x\,X'(x)\cdot T(t) - X(x)\cdot T''(t) = 0 \;\Leftrightarrow$

$\dfrac{x\,X'(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{T(t)} = k$ (konstant). $u(x, 0) = 0 \qquad T(0) = 0.$

Villkoren $T'' - kT = 0$, $T(0) = 0$ är uppfyllda för $T = A\sin(\sqrt{-k}\,t)$ och $x\,X' - kX = 0$ (separabel ekvation) har lösningen $X = Bx^k$. Funktionerna $u(x, t) = Ax^k\sin(\sqrt{-k}\,t)$ är alltså lösningar till den givna ekvationen och villkoret $u(x, 0) = 0$. Sambandet $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \dfrac{1}{x^2}$. är dessutom uppfyllt om

$\sqrt{-k}\,A\,x^k\cos(\sqrt{-k}\,t)_{t=0} = x^{-2}$, dvs $k = -2$ och $A = 1/\sqrt{2}$, dvs

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sin\sqrt{2}t}{x^2}\,.$$

6. Funktionen $f(z) = \dfrac{z}{1 - 2\sin z}$ är analytisk för alla z utom i täljarens nollställen.
Dessa ges av:
$1 - 2\sin z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \pi/6 + 2n\pi$ resp. $5\pi/6 + 2n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.
Alla nollställena är enkla. Av dessa är det bara $z = \pi/6$ som ligger inom enhetscirkeln. Residuumsaten ger då att den sökta integralen =

$$2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\pi/6} \frac{z}{1-2\sin z} = 2\pi i\left[\frac{z}{(1-2\sin z)'}\right]_{z=\pi/6} = 2\pi i\left[\frac{z}{-2\cos z}\right]_{z=\pi/6} =$$

$$= 2\pi i\,\frac{\pi/6}{-2\sqrt{3}/2} = -\,\frac{\pi^2 i}{3\sqrt{3}}$$ **: Svar**

7. a. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^n} = (\ \boldsymbol{r})\cdot\dfrac{1}{r^n} + \boldsymbol{r}\cdot\ \dfrac{1}{r^n} =$

$$= \left[\ \boldsymbol{r} = 3,\quad \frac{1}{r^n} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^n}\right)\cdot(\ r) = \frac{-n}{r^{n+1}}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right] =$$

$$= \frac{3}{r^n} - \frac{n\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})}{r^{n+2}} = \frac{3}{r^n} - \frac{n\,r^2}{r^{n+2}} = \frac{3-n}{r^n} = 0 \;\Leftrightarrow\; n = 3.$$

Svar: $n = 3$.

b. Eftersom div $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0$ för alla $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ så är, enligt divergenssatsen,

$$\oiint_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dA = 0$$

för alla randytor till kroppar som *inte* innehåller origo. Speciellt gäller detta för randytan till kroppen som ligger mellan enhetssfären **C**: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och ellipsoiden i uppgiften. Alltså är

$$\oiint_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dA - \oiint_{\mathbf{C}} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dA = 0, \text{ dvs.}$$

$$\oint\!\!\oint_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}A = \oint\!\!\oint_{\mathbf{C}} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}A = \left[\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{r}}{1^3},\ \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = r^2 = 1\right] =$$

$$= \oint\!\!\oint_{\mathbf{C}} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}A = \oint\!\!\oint_{\mathbf{C}} \mathrm{d}A = \left[\text{Arean av enhetssfären}\right] = 4\pi$$ **: Svar**