

## 5B1207, Differentialekvationer II. Obligatorisk inlämningsuppgift, VT 2005 för T2.

Godkänd uppgift ger 2 studiepoäng. Om den lämnas in senast *den 10 mars 2005* så ger den dessutom 2 bonuspoäng till den ordinarie tentan i april och till de båda följande omtentorna.

### Problemet

#### Rörelse hos pianosträng

I ett piano sätts strängar i plan svängning genom att de anslås med små filthammare. Vi skall studera en sådan strängs form som funktion av tiden, liksom innehållet av övertoner. Matematiskt innebär detta att vi skall lösa ett randvärdesproblem för en partiell differentialekvation, den endimensionella vågekvationen, och applicera begynnelsevillkor som motsvarar strängens inspänning och hammarens anslag.

Om strängen antar vi

- att den har längden  $L$  [m],
- att den är homogen (jämntjock) och har densiteten  $\rho$  [kg/m],
- att den är inspänd vid  $x = 0$  och  $x = L$  [m] längs en  $x$ -axel.

Utböjningen  $u(x, t)$  [m] vid tiden  $t$  [s] uppfyller då med god approximation differentialekvationen

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad 0 < x < L, t > 0.$$

Som en modell för hur hammaranslaget verkar antar vi

- att strängen i startögonblicket,  $t = 0$ , befinner sig i viloläge,
- att hammaren träffar ett strängsegment av längd  $H$  [m] centrerat till  $1/7$  av stränglängden,
- att strängen längs detta segment i startögonblicket får en hastighet  $v$  [m/s] vinkelrätt mot  $x$ -axeln,
- att strängen i de övriga delarna har hastigheten 0 i startögonblicket.

De olika konstanterna har följande numeriska värden:

$$L = 1, H = 1/(11 + A + B + C), c = 801 + B + C, v = A + B, \rho = 1/10,$$

där  $A, B$  och  $C$  är de tre sista nollskilda siffrorna i ditt (eller ett av era) personnummer.

### Vad som skall redas ut

Vi vill

- få en exakt lösning till problemet i form av en oändlig serie,
- få veta vilken grund- och vilka övertoner som alstras,
- genom trunkering av den oändliga serien få en god approximation  $\tilde{u}_N(x, t)$  till problemet i form av en ändlig serie,
- få en uppfattning om strängens form med hjälp av några ”ögonblicksbilder”, dvs. grafer för approximationerna  $\tilde{u}_N(x, t_i)$  vid några tidpunkter  $t_i$ .

### Presentation av lösningen

Lösningen skall ges i form av en rapport. Den skall vara organiserad på det sätt som är brukligt för tekniska och vetenskapliga publikationer. Det viktigaste med rapporten är att en läsare ska kunna återskapa dina resultat utifrån rapporten. Din rapport skall kunna förstås exempelvis av en kamrat som läst den här kursen men som inte känner till problemet innan.

Rapporten skall vara skriven på svenska eller engelska. I granskningen ställs krav på såväl pedagogisk framställning, sakinnehåll, layout som språkliga kvaliteter.

Arbetet kan utföras individuellt eller i grupp. Rapporten får ha *en eller maximalt två författare*.

## Rapportens innehåll

Rapporten *skall* åtminstone innehålla följande moment:

1. Beskrivning av problemet.
2. Uppställning av problemets randvillkor.
3. Bestämning av strängens egenfrekvenser. Speciellt anges grundtonens frekvens  $f$ .
4. Bestämning av ett exakt uttryck för utböjningen  $u(x, t)$  i form av en oändlig serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x) T_n(t),$$

där  $B_n$  oberoende av  $x$  och  $t$  samt där  $X_n$  och  $T_n$  normeras så att deras maximalvärde = 1.

5. Utredning av var serien lämpligen trunkeras, dvs. hur  $N$  skall väljas i

$$\tilde{u}_N(x, t) = \sum_{n=1}^N B_n X_n(x) T_n(t),$$

så att högst 10% av strängens totala energi förloras.

För att kunna genomföra detta får du veta att

- energin hos övertonen  $B_n X_n(x) T_n(t)$  är

$$E_n = \frac{2}{4L} c^2 n^2 B_n^2$$

- och att den totala energi som tillförs strängen är

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Hv^2}{2} E_n. \text{ (Det gäller } E_n = W.)$$

6. Plottar av grafer för  $\tilde{u}_N(x, t)$  som funktion av  $x$  vid tiderna  $t_i = 0.01/f, 0.07/f, 0.15/f, 0.33/f, 0.50/f$  och  $0.75/f$ .
7. Samanfattning i ord av hur strängen svänger.

*Ledning till 5:* Låt Matlab (eller något annat matematikprogram) göra en tabell över värdena av funktionen

$$S(M) = \sum_{n=1}^M E_n / W \text{ för förslagsvis } 1 \leq M \leq 300. \text{ Leta upp ett } M \text{ för vilket } S(M) \approx 0.9.$$

## Examination

För godkänt krävs,

- att rapporten inklusive figurer är maximalt 5 sidor lång,
- att rapporten och bedömningsmallen (bifogas som sista sida i det här dokumentet) skall vara ihopäftad, bedömningsmallen överst,
- att rapportskrivning sker enskilt eller parvis,
- att titel, författare, samt folkbokföringsnummer anges överst på sid 1 i rapporten,
- att det anges i en anmärkning i rapporten om ni samarbetat med andra grupper än två personer.

Om man vill kunna tillgodoräkna sig 2 bonuspoäng på årets tentor, så måste väl utarbetad rapport lämnas in senast den 10 mars. De lämnas till övningsledaren eller läggs i institutionens brevlåda i trapphuset strax bredvid innerdörrarna vid ingången Lindstedtsvägen 25.

De kan också postas till

Eike Petermann, Institutionen för matematik, KTH, 100 44 Stockholm.

Rapporterna kommer att tilldelas betyget **Godkänt** eller **Underkänt**.

Är rapporten underkänd kan den kompletteras och revideras samt lämnas in en andra gång senast 050502. Notera att rapporter inlämnade efter 10 mars kommer att behandlas i denna senare grupp.

**Bedömningsmall för den obligatoriska hemuppgiften**  
**Differentialekvationer II, 5B1207 för T2, VT05**

*Endast uppgifterna i denna ruta fylls i:*

Titel:.....

Författare 1:.....

Författare 2:.....

	<b>G</b>		<b>U</b>	
Rapportens längd i sidor?		5 sidor		> 5 sidor
	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
		2 st		> 2 st
Antal författare?		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>
	ja	oftast	ibland	nej
Upplägget/språket lätt att följa?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	ja	de flesta	ett fåtal	nej
Resultat finns?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	ja	de flesta	ett fåtal	nej
Resultaten korrekta?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	ja	oftast	nej	framgår ej
Används de matematiska hjälpmedlen på rätt sätt?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>Första granskning</b>		<b>G</b>	<input type="checkbox"/>	<b>U</b>
		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Sign:
.....				
<b>Andra granskning</b> (vid U ovan)		<b>G</b>	<input type="checkbox"/>	<b>U</b>
		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Sign:

**Godkänd**

Signatur: