Repetition, linjär algebra.

2. Bestäm de värden på a för vilka vektorerna $(1,a,a+1)$ och $(a,4,-a)$ är parallella.

3. Undersök om vektorerna $(3,0,1)$, $(0,5,0)$ och $(-2,3,4)$ ligger i samma plan.

5. Är punkterna $(3,7,-2)$, $(5,5,1)$, $(6,-2,2)$, $(4,0,-1)$ hörn i en parallellogram?

6. En cirkel med medelpunkten i $(-4,1)$ har ändpunkten till en diameter i punkten $(2,6)$. Var ligger denna diameters andra punkt?

7. För vilket värde på a kan vektorerna $(3,1,a)$, $(-1,3,4)$ och $(4,-2,-6)$ bilda sidor i en triangel?

9. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $(1,2,3)$ och $(5,2,-3)$.

10. För vilka värden på a är vektorerna $(a,-2,1)$ och $(2a,a,-4)$ vinkelräta?

11. Bestäm en enhetsvektor i yz–planet som är vinkelrät mot vektorn $(1,2,-1)$.

12. Bestäm en vektor vars vinklar med positiva x–, y– och z–axlarna är $\pi/3$, $3\pi/4$ resp $2\pi/3$ och vars längd är 2.

13. Bestäm projektionen av vektorn $(3,3,3)$ på vektorn $(1,2,1)$.

14. Bestäm projektionen och dess längd av $(2,-3,6)$ på $(1,2,2)$.

15. Skriv vektorn $(7,-2,3)$ som en summa av två vektorer, varav den ena är parallell med $(2,2,1)$ och den andra är vinkelrät mot samma vektor.

16. Bestäm de båda enhetsvektorer som är ortogonala mot vektorerna $(2,-6,-3)$ och $(4,3,-1)$.

17. Ange ett värde på talet a så att ekvationen $(1,2,3)\times(x,y,z) = (1,a,3)$ blir lösbar.

18. En parallellogram har hörnpunkterna $(1,3,2)$, $(2,-1,1)$, $(-1,2,3)$ och $(0,-2,2)$. Sök parallellogrammens area.

19. Vektorerna $(1,-1,1)$ och $(a,0,2)$ utgör två sidor i en triangel. Bestäm a så att triangelns yta blir $= \sqrt{6}$.

20. Beräkna volymen av en parallellepiped som har en kantlinje från $(1,-4,6)$ till $(4,-1,4)$, en annan från $(4,-1,4)$ till $(2,3,4)$ och en tredje från $(2,3,4)$ till $(9,5,6)$.

21. Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkterna $(1,0,-2)$ och $(4,6,2)$.

22. En rät linje går genom punkten $(0,1,2)$ och är ortogonal mot såväl vektorn $(2,-3,1)$ som vektorn $(1,4,-2)$. Angiv linjens ekvation.

Svar:

2.	$a = -2$.	3.	Nej.	5.	Ja.
6.	$(-10,-4)$.	7.	$a = -2$.	9.	$\pi/2$.
10.	$a = 2$ och $a = -1$.	11.	$\pm(0,1/\sqrt{5},2/\sqrt{5})$.	12.	$(1,-\sqrt{2},-1)$.
13.	$(2,4,2)$.	14.	$\frac{8}{9}(1,2,2)$, längd $\frac{8}{3}$.	15.	$\frac{13}{9}(2,2,1)+\frac{1}{9}(37,-44,14)$.
16.	$\pm\frac{1}{7}(3,-2,6)$.	17.	$a = -5$.	18.	$\sqrt{107}$.
19.	$a = 4$ eller $a = -2$.	20.	100.	21.	$(1+3t,6t,-2+4t)$.
22.	$(2t,1+5t,2+11t)$.				

23. Avgör om någon av punkterna $(1,4,-1)$ eller $(-1,3,-6)$ ligger på linjen $x = 3 + 2t$, $y = 5 + t$, $z = 2 + 4t$.

24. Avgör om linjerna $(x,y,z) = (2,3,7) + t(1,-1,1)$ och $(x,y,z) = (-1,2,0) + s(-1,8,6)$ skär varandra.

26. Ett plan är ortogonalt mot vektorn $(3,1,2)$ och innehåller punkten $(-3,7,4)$. Ange planets ekvation.

27. Visa att linjerna $(x,y,z) = (1,2,1) + t(3,-1,1)$ och $(x,y,z) = (2,3,0) + s(1,-1,1)$ ligger i samma plan och bestäm ekvationen för detta plan.

28. Bestäm a så att vektorn $(1,a,3)$ blir parallell med planet $x + 2y + 3z = 1$.

29. Bestäm skärningspunkten mellan planet $2x + y - 2z + 1 = 0$ och linjen $(x,y,z) = (2,3,1) + t(1,1,0)$.

30. Planen $x + 4y - 3z = 2$ och $3x - y + 2z = 3$ skär varandra längs en rät linje. Angiv linjens ekvation.

31. Sök ekvationen för den linje som går genom punkten $(1,2,1)$ och är vinkelrät mot planet $x + 2y - z = 0$.

33. Avgör om punkterna $(3,9,6)$ och $(-2,5,3)$ ligger på samma sida eller på olika sidor om planet $x - y - z + 11 = 0$.

34. Bestäm kortaste avståndet mellan planet $x + 2y + 3z = 4$ och punkten $(3,1,1)$.

35. Bestäm avståndet från det plan som går genom punkterna $(4,3,2)$, $(6,0,0)$ och $(-2,8,4)$ till punkten $(5,4,2)$.

37. Beräkna avståndet från punkten $(2,5,2)$ till linjen $(x,y,z) = (2,0,0) + t(2,1,2)$.

38. Bestäm avståndet mellan linjerna $(x,y,z) = (-1 + 2t,-3 + t,-t)$ och $(x,y,z) = (4,2,3) + s(1,5,1)$.

39. Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkten $(1,2,3)$ och som skär linjen $(x,y,z) = (6,0,4) + t(3,-2,3)$ vinkelrätt.

40. Skriv $\dfrac{(2 + \mathrm{i})(3 + \mathrm{i})}{4 - \mathrm{i}}$ på formen $a + \mathrm{i}b$.

41. Bestäm absolutbeloppet av $\dfrac{(3 - 2\mathrm{i})(1 - \mathrm{i})}{(2 + \mathrm{i})^2}$.

42. Bestäm argumentet för $\dfrac{(3 + \mathrm{i}\sqrt{3})^4}{(1 - \mathrm{i})^8}$.

43. Skriv $\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/2}$ på formen $a + b\mathrm{i}$.

Svar:

23.	$(1,4,-1)$ nej, $(-1,3,-6)$ ja.	24.	Ja.	26.	$3x + y + 2z = 6$.
27.	$y + z = 3$.	28.	$a = -5$.	29.	$(0,1,1)$.
30.	$(5t, 13/5 - 11t, 14/5 - 13t)$.	31.	$(1 + t, 2 + 2t, 1 - t)$.	33.	På olika sidor.
34.	$4/\sqrt{14}$.	35.	1.	37.	$\sqrt{20}$.
38.	$\sqrt{14}$.	39.	$(1 + 2t, 2, 3 - 2t)$.	40.	$\dfrac{15}{17} + \dfrac{25\mathrm{i}}{17}$.
41.	$\sqrt{26}/5$.	42.	$2\pi/3$.	43.	$-\mathrm{i}$.

44. Lös ekvationen $z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0$.

45. Lös ekvationen $(1 + i)z^2 + (2i - 2)z + 6 - 2i = 0$.

46. Lös ekvationen $z^4 = 1$.

47. Lös ekvationen $z^4 + 2iz^2 + 3 = 0$.

48. Lös ekvationen $z^3 - iz^2 - z + i = 0$, då man vet att $z = i$ är en rot.

49. Ekvationen $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$ har en rot $z = -1 + i$. Bestäm samtliga rötter.

50. Ekvationen $z^4 + 3z^3 + z^2 + 18z - 30 = 0$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen.

51. Bestäm de reella talen a och b så att ekvationen $z^3 + az + b = 0$ får roten $z = 1 - 2i$. Lös ekvationen.

52. Uppdela $x^4 + 1$ så långt som möjligt i reella faktorer.

53. Lös ekvationssystemet a. $\begin{cases} 5x + 2y + 2z = 7 \\ x - y + 3z = 8 \\ 3x - y - 3z = -2 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$.

54. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 3x + y - 5z = 8 \\ 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ x - 2y + 4z = -3 \end{cases}$.

55. Ange för alla reella a lösningsmängden till ekvationssystemet $\begin{cases} -2x + y + 2z = 3 \\ ax + 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases}$.

56. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = a \\ x - 5y + 8z = 1 \end{cases}$ skall ha någon lösning?

57. Bestäm varje värde på konstanten a för vilket det existerar en rät linje parallell med de tre planen $x + y + z = 1$, $ax + (a + 3)y + z = 2$, $5x - ay + 2z = 3$.

58. Bestäm för varje a–värde antalet lösningar till systemet $\begin{cases} 2ax + 3y + az = 4a \\ x + (a - 1)y = a \\ x - y + z = 1 \end{cases}$.

Svar:

44. $1 + 3i$, $-1 + i$ 45. $-1 - 3i$, $1 + i$. 46. $1, i, -1, -i$.

47. $\pm\frac{1 + i}{\sqrt{2}}$, $\pm\sqrt{3}\cdot\frac{1 - i}{\sqrt{2}}$. 48. $z_1 = i$, $z_{2,3} = \pm 1$. 49. $z_2 = -1 - i$, $z_{3,4} = \pm i$.

50. $z_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$, $z_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$. 51. $a = 1$, $b = 10$, $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = -2$.

52. $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$. 53a. $(1, -1, 2)$.

53b. $(t, 2 - t, 3 - t)$. 54. $(1, 0, -1)$.

55. $a = -1 \Rightarrow$ olösbart; $a \neq -1 \Rightarrow x = \frac{-20}{7(a + 1)}$, $y = \frac{11}{7}$, $z = \frac{5a - 15}{7(a + 1)}$.

56. $a = 3$. 57. $a = -2$.

58. $a \neq -1$, $a \neq 3 \Rightarrow$ en lösning; $a = -1 \Rightarrow$ ingen lösning; $a = 3 \Rightarrow$ oändligt många lösningar.

59. Beräkna determinanten:

a. $\det\begin{bmatrix} 12 & 7 & 32 \\ 18 & 14 & 24 \\ 6 & 7 & 16 \end{bmatrix}$ b. $\det\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ c. $\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

60. Sätt $A = (1\ \ 1\ \ -3)$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Beräkna AB^{T}. Beräkna $(AB)^{\mathrm{T}}$.

61. Bestäm inversen till matrisen: a. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & -11 & -3 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$. b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

62. Beräkna $B^{-1}A^{-1}$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

63. Lös matrisekvationen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$.

64. A är en inverterbar 4×4–matris sådan att $A^2 + A = 0$. Bestäm A.

65. Ange standardmatrisen för den linjära avbildningen T, som ges av $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z \\ x + y \\ y + z \end{bmatrix}$.

66. Bestäm en linjär avbildning T, sådan att $T(3,4) = (5,6)$ och $T(2,3) = (7,8)$.

67. För en linjär avbildning T gäller att $T(9,8,7) = (1,1,0)$ och $T(1,1,1) = (1,0,0)$. Bestäm
a. $T(11,10,9)$.
b. någon vektor (x,y,z) som avbildas på $(0,1,0)$.

68. Ange standardmatrisen för den linjära avbildningen $T\colon \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ som är en sammansättning av följande avbildningar:
rotation med vinkeln $\pi/6$, spegling i linjen $x = y$, expanssion i x-led med faktorn 2, skjuvning i y-led med faktorn 3.

69. Vilken är den geometriska innebörden av den linjära avbildningen som ges av matrisen $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$?

Svar:

59a. 22. 59b. 0. 59c. –9. 59d. –18.

60. $(-6\ \ -7\ \ 4)$, $(-6,-4,5)^{\mathrm{T}}$. 61a. $\begin{bmatrix} -51 & 3 & 20 \\ -18 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 61b. $\begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -8 & -1 & 6 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

62. $1/4\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. 63. $\begin{bmatrix} 0 & 17 & -5 \\ 1 & -9 & 4 \\ 1 & 58 & -20 \end{bmatrix}$. 64. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

65. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 66. $\begin{bmatrix} -13x + 11y \\ -14x + 12y \end{bmatrix}$. 67a. $(3,1,0)$. 67b. $(8,7,6)$.

68. $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3}/2 & 3\sqrt{3} - 1/2 \end{bmatrix}$.

69. T.ex. först rotation med vinkeln $\pi/2$ och sedan skjuvning i y-led med faktorn 2.

70. Skriv vektorn $(1,-2)$ i R^2 som en linjärkombination av $(2,1)$ och $(3,2)$.

71. Undersök om $(2,-1,6)$ är en linjärkombination av $(1,-2,0)$, $(0,1,2)$, $(5,-6,8)$.

72. Bestäm talet a så att $(1-a,2,0)$ och $(6,4,a+2)$ är linjärt beroende.

73. Vilka av följande vektoruppsättningar är linjärt oberoende:
a. $(-2,0,0)$, $(8,0,-5)$, $(-1,0,3)$ b. $(1,3,-2)$, $(-3,-5,6)$, $(0,5,-6)$?

74. Undersök om vektorerna $(1,2,3)$, $(3,2,1)$, $(2,1,3)$ bildar en bas för R^3.

75. Vilka av följande vektoruppsättningar spänner upp R^3:
a. $(1,2,3)$, $(0,2,3)$, $(0,0,3)$. b. $(1,0,2)$, $(3,0,1)$, $(5,0,-2)$, $(7,0,-4)$?

76. Bestäm egenvärden och egenvektorer till: a. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

77. Vilka av följande matriser är diagonaliserbara:
a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. c. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. d. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. e. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

78. Sök en matris P sådan att $P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}P$ är en diagonalmatris.

79. Sök en matris P sådan att $P^{-1}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}P$ är en diagonalmatris.

80. Matrisen A har egenvärden -1, 0 och 2 och motsvarande egenvektorer $(-1, 1, 0)$, $(0, 1, -1)$ resp. $(2, 1, 3)$. Bestäm A.

81. Bestäm A^{11} då $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

82. Bestäm på huvudaxelform ekvationen för kurvan
a. $11x^2 - 4xy + 14y^2 = 5$. b. $x^2 + 6xy + y^2 = 2$.

83. Bestäm på huvudaxelform ekvationen för ytan
a. $4xy + 4xz + 4yz = 2$. b. $3x^2 + 4xy + 2y^2 + 4xz + 4z^2 = 3$.

Svar:

70. $(1,-2) = 8(2,1) - 5(3,2)$. 71. Ja. 72. $a = -2$.

73. b. 74. Bildar en bas. 75. a.

76a. $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$. Motsvarande egenvektorer $(1,1)$, $(-1,1)$.

76b. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -4$. Motsvarande egenvektorer $(4,-3,0)$, $(3,4,5)$, $(3,4,-5)$.

77. a, c och d.

78. $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. 79. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 80. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

81. $\begin{bmatrix} 2048 & -2048 & 2048 \\ 2047 & -2047 & 2048 \\ 2047 & -2047 & 2048 \end{bmatrix}$. 82a. $3u^2 + 2v^2 = 1$. 82b. $2u^2 - v^2 = 1$.

83a. $4u^2 - 2v^2 - 2w^2 = 1$. 83b. $2u^2 + v^2 = 1$.

84. Lös matrisekvationen $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 4 & -8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

85. Låt $A = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna $C = B^{-1}AB$. Beräkna C^9. Beräkna A^9 med hjälp av C^9.

86. Verifiera att $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 8 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 5 \end{bmatrix}$. Utgående från detta, bestäm a, b och c så att $\begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 5 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}$.

87. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Verifiera att $2A - 5B = C$. Utgående från detta, lös ekvationen $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

88. Visa att likheten $a\,[1\ \ 1\ -1] + b\,[0\ \ 1\ \ 2] + c[3\ \ 0\ \ 1] = [0\ \ 0\ \ 0]$ äger rum om och endast om $a = b = c = 0$.

89. Bestäm matrisen A så att $A + 2A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$.

90. Bestäm matrisen A då $(A^{-1} - 2\mathrm{I})^{\mathrm{T}} = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

91. Låt $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix}$. Antag att $\det(A) = 3$. Beräkna $\det(2C^{-1})$ då $C = \begin{bmatrix} 2p & u-a & 3u \\ 2q & v-b & 3v \\ 2r & w-c & 3w \end{bmatrix}$.

92. Visa att $\det(A + B^{\mathrm{T}}) = \det(A^{\mathrm{T}} + B)$ för godtyckliga $n \times n$–matriser.

93. Talen 20944, 51510, 10302, 53227 och 78404 är alla delbara med 17. Visa att detta gäller även för talet $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

94. Bestäm avståndet från punkten $P = (3,1,3)$ till linjen $(x,y,z) = (3 + 2t,\ 4 + 2t,\ -t)$ och ange den punkt på linjen som ligger närmast punkten P.

Svar:

84. $\begin{bmatrix} 5-2s & 2-2t \\ -3+s & 2+t \\ s & t \end{bmatrix}$.

85. $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C^9 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 512 \end{bmatrix}$, $A^9 = \begin{bmatrix} -1027 & 1539 \\ -1026 & 1538 \end{bmatrix}$.

86. $a = -1$, $b = 4$, $c = 2$.

87. $x = 2$, $y = -5$.

89. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

90. $A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

91. 4/9.

94. 3 och (1, 2, 1).

95. Kan $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 3$ om $\|\boldsymbol{u}\| = 2$ och $\|\boldsymbol{v}\| = 1$?

96. Undersök om vektorerna $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 2)$ och $(3, 1, 3)$ ligger i samma plan.

97. Bestäm en vektor vars vinklar med positiva x–, y– och z–axlarna är $\pi/3$, $3\pi/4$ resp $2\pi/3$ och vars längd är 2.

98. Bestäm alla vektorer som bildar lika stora vinklar med de tre vektorerna $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ och $(1,0,0)$.

99. Ange ett värde på talet a så att vektorekvationen $(1,2,3)\times(x,y,z) = (1,a,3)$ blir lösbar.

100. Skriv på formen $a + b\mathrm{i}$ där a och b är reella tal:

a. $\dfrac{3-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} - \dfrac{3-7\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$ b. $(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2$

c. $(1+\mathrm{i})^8$ d. $(2-2\mathrm{i})^5(\sqrt{3}-\mathrm{i})^9$

101. Visa att: a. $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z) = -\mathrm{Im}(z)$ c. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.

102. Visa att $|w+z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + w\overline{z} + \overline{w}z$ för alla komplexa tal w och z.

101. Bestäm alla k–värden så att de nedanstående vektorerna i $\mathbf{R}^4$ blir linjärt oberoende:

a. $(1,1,2,0)$, $(2,3,1,1)$, $(3,4,3,0)$, $(4,7,-1,k)$.

b. $(1,1,2,0)$, $(2,3,1,1)$, $(3,4,3,0)$, $(4,7,-1,1)$, $(1,0,0,k)$.

102. Undersök om vektorn $\boldsymbol{v} = (5,6,3)$ tillhör $\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ då $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,3,1)$ och $\boldsymbol{v}_3 = (4,5,5)$.

103. Undersök om vektorerna

a. $\boldsymbol{v}_1 = (1,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4)$ bildar en bas i $\mathbf{R}^2$.

b. $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,3,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (4,5,5)$ bildar en bas i $\mathbf{R}^3$.

104. Undersök om man kan bilda en bas i $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer till matrisen

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Om så är fallet ange en sådan bas.

105. Låt $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -14 \end{bmatrix}$. Verifiera att A och B är diagonaliserbara men AB är det inte.

Svar:

95. Aldrig i livet! 96. Ligger i samma plan. 97. $(1,-\sqrt{2},-1)$.

98. $t(1,\sqrt{2}-1,\sqrt{3}-\sqrt{2})$. 99. -5. 100a. $\dfrac{11}{26} + \dfrac{23}{26}\mathrm{i}$

100b. $-2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$ 100c. 16 100d. $-65536-65636\mathrm{i}$

101a. $k \neq 3$. 101b. Det finns inte något sådant k–värde.

102. Ja. 103a. Ja. 103b. Nej.

104. T.ex $(1,0)$, $(0,1)$.