Repetition inför lappskrivning 1, 5B1102/1 för Bio och K

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x + 3y + 3z = b \end{cases}$.

2. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 4x - 2y - z = -3 \\ 3x - 2z = -3 \\ 2x + 2y - 3z = -3 \end{cases}$.

3. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} y - 2z + v = -7 \\ 4x - 5y - 2z + 3v = -1 \\ 3x - 4y - z + 2v = 1 \\ 2x - 3y + v = 3 \end{cases}$.

4. För vilka värden på konstanter a, b och c har ekvationssystemet
$$\begin{cases} 3x + y - z = a \\ x - y + 2z = b \\ 5x + 3y - 4z = c \end{cases}$$
precis en lösning? Oändligt många lösningar? Ingen lösning?

5. Bestäm a, b och c så att ekvationssystemet $\begin{cases} x + ay + cz = 0 \\ bx + cy - 3z = 1 \\ ax + 2y + bz = 5 \end{cases}$ får lösningen $x = 3, y = -1,$ $z = 2$.

6. En häst kostar 13 riksdaler mer än en get men 12 riksdaler mindre mindre än tre getter och en ko. Vad kostar tillsammans en get, en ko och en häst?

7. Bestäm koefficienterna a, b och c i polynomet $f(x) = a + bx + cx^2$ så att $f(1) = 0, f(2) = 0$ och $f(3) = 2$.

8. En kurva i xy–planet ges av ekvationen $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Bestäm a, b och c så att punkterna $(-2,1), (5,0)$ och $(4,1)$ ligger på kurvan.

9. Bestäm a, b och c så att $\dfrac{x^2 - x + 3}{(x^2 + 2)(2x + 1)} = \dfrac{ax + b}{x^2 + 2} + \dfrac{c}{2x + 1}$.

10. Avgör genom att identifiera koefficienterna för olika potenser av x i vänster– och högerled om det finns tal a, b, c, d så att identiteten
$$(ax + b)(x^2 - 1) + (cx + d)(x^2 - 3x + 2) = x^3 + 2$$
gäller.

11. Finns det något värde på talet k för vilket de tre planen $kx + 2y + 3z = 1$, $3x + kz = -21$ och $-x + y + z = k$ har en linje gemensam?

12. Bestäm varje värde på konstanten a för vilket det existerar en rät linje parallell med de tre planen $x + y + z = 1$, $ax + (a + 3)y + z = 2$, $5x - ay + 2z = 3$.

13. Beräkna $(A^T - 2B)\,A$ då $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Bestäm inversen till matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

15. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & c \end{bmatrix}$. Bestäm c så att $AB = BA$.

16. Bestäm matrisen A så att $\left(2A^{\mathrm{T}} - 5\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right) = 4A - 9\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

17. Lös matrisekvationen $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ då $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

18. Bestäm matrisen A då $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

19. Bestäm matrisen A då $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

20. Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Verifiera att $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)\mathrm{I} = 0$.

21. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$ där $b \neq 0$. Beräkna AA^{T} och bestäm sedan A^{-1}.

22. Bestäm talen a, b och c så att

$$a\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

23. Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ genom att först beräkna A^3.

24. Lös matrisekvationen $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

25. Lös matrisekvationen $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

26. Beräkna följande determinanter:

a. $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

27. Beräkna $\det(A)$ då A är en 3×3–matris och $\det(2A) = 5$.

28. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Lös ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.

29. Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

30. Visa att $\begin{vmatrix} p+x & q+y & r+z \\ a+x & b+y & c+z \\ a+p & b+q & c+r \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$.

31. Låt A vara en 3×3–matris. Antag att $\det(2A^{-1}) = \det(A^3(B^{-1})^T) = -4$. Beräkna $\det(A)$ och $\det(B)$.

32. Bestäm alla värden på konstanten c för vilka matrisen $\begin{bmatrix} 3 & c & 4 \\ c & 2 & c \\ 6 & c & 5 \end{bmatrix}$ är inverterbar.

33. Beräkna $\det(A^5)$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

34. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 2v = 1 \\ 3x + 2y + az + 2v = 2 \\ 3x + 2y + z + v = 3 \\ 2x + 3y + z + v = 4 \end{cases}$$

skall ha precis en lösning?

35. För vilka a–värden har det homogena ekvationssystemet med koefficientmatrisen $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & a \end{bmatrix}$ icke–triviala lösningar?

Svar

1. $x = 2b - 3a - 9t,\ y = 2a - b + 5t,\ z = t.$

2. $x = 1 + 4t,\ y = 2 + 5t,\ z = 3 + 6t.$

3. $x = 1 + 2s + 3t,\ y = -1 + 3s + 4t,\ z = 2 + 4s + 5t,\ v = -2 + 5s + 6t.$

4. Precis en lösning inte möjligt. Oändligt många lösningar $\Leftrightarrow$ $c = 2a - b$. Ingen lösning $\Leftrightarrow$ $c \neq 2a - b$.

5. $a = 1, b = 2, c = -1.$

6. 38 riksdaler.

7. $a = 2, b = -3, c = 1.$

8. $a = -2,\ b = 6,\ c = -15.$

9. $a = -1/3,\ b = -1/3,\ c = 5/3.$

10. Nej, det finns inte några sådana tal.

11. $k = -3.$

12. $a = -2.$

13. $\begin{bmatrix} 12 & -10 & 8 \\ -2 & 0 & -3 \\ 6 & -9 & 7 \end{bmatrix}.$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 8 \end{bmatrix}.$

15. $c = 9.$

16. $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}.$

17. $X = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 1 \end{bmatrix}.$

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1/2 \end{bmatrix}.$

19. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$

21. $AA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2 \end{bmatrix}$ och

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/b & 0 & 0 \\ -1/b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/b \\ 0 & 0 & -1/b & 0 \end{bmatrix}$$

22. $a = 2, b = 1, c = -1.$

23. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

24. $X = \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}.$

25. $\begin{bmatrix} 21 & 32 \\ -37 & -55 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}.$

26. a. 1., b. 2.
c. $-abc.$ d. $abcd.$

27. 5/8.

28. $0, \pm\sqrt{3}.$

29. 3.

31. $\det(A) = -2,\ \det(B) = 2.$

32. ± 3

33. $-32.$

34. $a \neq 2.$

35. $a = 2.$