Lösning till exempelsamlingens problem 8.5

Observera att uppgiftslydelsen här har ändrats. Beloppskvadraterna ($|\cdot|^2$) i formeln för aliasfelet E har här bytts ut mot enbart belopp utan kvadrater ($|\cdot|$).

Vi börjar med att beräkna Fouriertransformen för pulsfunktionen $x(t)$:

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{8\pi e^{-4\pi|t|}\} = 8\pi\,\mathcal{F}\{e^{-4\pi|t|}\} = \Big/ \text{rosa F.S. (4.3)} \Big/$$
$$= \frac{16}{4+f^2}.$$

Fouriertransformen (TDFT) för den samplade signalen $y[n]$ ges av sambanden för sampling som

$$Y_d(f_d) = \frac{1}{T}\sum_m X\left(\frac{f_d - m}{T}\right).$$

Felbeloppet, dvs integralen i täljaren, beräknas:

$$E_{\text{fel}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |Y_d(f_d) - \tfrac{1}{T}X(f_d/T)|\, df_d$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{T}\sum_m X\left(\frac{f_d-m}{T}\right) - \tfrac{1}{T}X(f_d/T)\right| df_d$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{T}\sum_{m\neq 0} X\left(\frac{f_d-m}{T}\right)\right| df_d$$
$$= \Big/ X(f) \geq 0 \text{ för alla } f \Big/ = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{T}\sum_{m\neq 0} X\left(\frac{f_d-m}{T}\right) df_d$$
$$= \cdots + \frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X\left(\frac{f_d-1}{T}\right) df_d + \frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X\left(\frac{f_d-2}{T}\right) df_d + \cdots$$
$$= \cdots + \frac{1}{T}\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} X\left(\frac{f_d}{T}\right) df_d + \frac{1}{T}\int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} X\left(\frac{f_d}{T}\right) df_d + \cdots$$
$$+ \frac{1}{T}\int_{-m-\frac{1}{2}}^{-m+\frac{1}{2}} X\left(\frac{f_d}{T}\right) df_d + \cdots$$
$$= \Big/ \text{samma integrand, angränsande integrationsområden} \Big/$$
$$= \frac{1}{T}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} X\left(\frac{f_d}{T}\right) df_d + \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} X\left(\frac{f_d}{T}\right) df_d$$
$$= \Big/ X\left(\frac{f_d}{T}\right) \text{ jämn} \Big/ = \frac{2}{T}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} X\left(\frac{f_d}{T}\right) df_d = \frac{2}{T}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{16}{4+\frac{f_d^2}{T^2}}\, df_d$$
$$= \frac{32}{T}\left[\frac{T}{2}\arctan\frac{1}{4T}\right]_{\frac{1}{2}}^{\infty} = 8\pi - 16\arctan\frac{1}{4T}.$$

Det visar sig alltså att felenergin är integralen av insignalens spektrum över $|f_d| \geq 1/2$, eller, då $f_d = f/f_s$, över $|f| \geq f_s/2$. Vi kan konstatera att felet härhör från de delar av $x(t)$ som *inte* uppfyller samplingsteoremet.
Totala energin (integralen i nämnaren) beräknas på liknande sätt:

$$
\begin{aligned}
E_{\text{tot}} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |Y_d(f_d)|\, df_d = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{m \neq 0} X\left(\frac{f_d - m}{T}\right) \right| df_d \\
&= \Big/ \text{samma metod som ovan} \Big/ = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X\left(\frac{f_d}{T}\right) df_d \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\infty} \frac{16}{4 + \frac{f_d^2}{T^2}}\, df_d = 8\pi.
\end{aligned}
$$

Aliasfelet som funktion av sampeltiden T blir då

$$
E = \frac{E_{\text{fel}}}{E_{\text{tot}}} = \frac{8\pi - 16 \arctan \frac{1}{4T}}{8\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{4T}.
$$

När man till slut sätter $E < 0.01$ (1% fel) erhålles svaret

$$
T < 0.0039\,\mathrm{s} \;\Rightarrow\; f_s = T^{-1} > 255\,\mathrm{Hz} = \text{svar}.
$$