Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning, matematisk analys (5B1304), den 9/1 2002, kl 8^{00}–13^{00}.

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, Kreyszig och kurslitteratur från tidigare matematikkurser, föreläsningsanteckingar samt räknedosa utan ”Computer Algebra System” (= automatisk formelbehandling).
Gamla tentamina med lösningar är inte tillåtna.

Fordringar:

Betyg:	3	4	5
Minimipoäng totalt:	12	16	22
Minsta antal uppgifter med ≥ 2p:	3		
Min.poäng sammanlagt på uppgifterna 1, 2, 3, 4 resp 5, 6, 7:	3	4	4

1. Ekvationen

$$y'' - \frac{x\cos x}{\cos x + x\sin x}\,y' + \frac{\cos x}{\cos x + x\sin x}\,y = r(x)$$

har för $r(x) = 0$ bland annat lösningarna $y = x$ och $y = \cos x$. (Detta behöver inte verifieras.)

Beräkna för $r(x) = \cos x + x\sin x$ den lösning som satisfierar $y(0) = y'(0) = 0$. (3p)

2. Bestäm en lösningen till differentialekvationen

$$x^4 y'' + y = 0$$

som uppfyller villkoret $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$. (3p)

3. Låt

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{om } |x| \le 1, \\ 0, & \text{om } |x| > 1. \end{cases}$$

a. Beräkna fouriertransformen av $f(x)$. (3p)

b. Låt för $L > 1$, $g(x)$ vara den $2L$-periodiska funktion som i intervallet $-L \le x \le L$ är identisk med $f(x)$, dvs

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{om } |x| \le L, \\ g(x + 2L), & \text{för alla } x. \end{cases}$$

Bestäm (t.ex. med hjälp av resultatet i a-uppgiften) den *komplexa* fourierserieutvecklingen av $g(x)$. (3p)

4. Verifiera att

$$y'' + \lambda x^3 y = 0,\ y(0) = y(1) = 0,\ 0 \le x \le 1,$$

är ett Sturm-Liouvilleproblem. Ange motsvarande ortogonalitetsrelation.
Beräkna vidare konstanten a så att funktionerna $f(x) = 1$ och $g(x) = x + a$ är ortogonala enligt denna relation. (3p)

---

5. Bestäm i området $1 \le x,\ 0 \le t$ den lösning $u(x,t)$ till den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

som satisfierar $u(x, 0) = 0$ och $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \dfrac{1}{x^2}$. (3p)

Var god vänd!

6. Beräkna

$$\oint_{|z|=1} \frac{z}{1 - 2\sin z}\, dz,$$

där enhetscirkeln genomlöps i positiv led. (3p)

7. a. Låt $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^n}$, där $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ och $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Bestäm talet n så att div $\boldsymbol{F} = 0$, då $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}$. (3p)

b. Bestäm för detta n-värde ytintegralen

$$\oiint_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA,$$

där $\mathbf{S}$ är randytan till ellipsoiden $x^2 + y^2/4 + z^2/9 \leq 1$. Normalriktningen $\hat{\boldsymbol{n}}$ är utåtriktad. (3p)

Lycka till!