Lektion 10, Envariabelanalys den 9 november 1999

Visa att $\sin x = O(x)$ då $x \to 0$.

Vi ska visa att det finns ett $C > 0$ så att

$$|\sin x| \le C|x| \quad \text{för alla } x \text{ i en punkterad omgivning av 0.} \qquad (*)$$

Eftersom

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

så vet vi från gränsvärdesdefinitionen att

$$1 - \varepsilon \le \frac{\sin x}{x} \le 1 + \varepsilon \quad \text{för alla } x \text{ i en punkterad omgivning av } 0,$$

vilket ger speciellt att

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le 1 + \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |\sin x| \le (1+\varepsilon)|x|$$

i en punkterad omgivning av 0. Därmed har vi visat $(*)$.

Anm. Alltså duger $C = 1 + \varepsilon$ som konstant, men omgivningens storlek får vi inte fram med ovanstående resonemang. Vi vet iallafall att det finns en omgivning där $(*)$ är uppfylld, och det räcker i denna uppgift.

Visa att $e^x = 1 + x + O(x^2)$ då $x \to 0$.

Om vi Taylorutvecklar e^x i punkten $x = 0$ får vi

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}e^{\xi}x^2,$$

där ξ ligger mellan 0 och x. Eftersom $x \mapsto e^x$ är en växande funktion så är resttermen

$$\left|\tfrac{1}{2}e^{\xi}x^2\right| \le \tfrac{1}{2}e^{\max\{0,x\}} \cdot |x^2| \le \tfrac{1}{2}e^1 \cdot |x^2| \qquad \text{för alla } |x| < 1.$$

Alltså är resttermen $O(x^2)$ och vi kan skriva

$$e^x = 1 + x + O(x^2) \quad \text{då } x \to 0.$$

Anm. Egentligen räcker det med att konstatera att $\frac{1}{2}e^{\xi}$ är begränsad för ξ nära 0.

Är $e^x = O(x^{10})$ då $x \to \infty$?

Vi ska undersöka om det finns ett $C > 0$ och ett $N > 0$ så att

$$|e^x| < C|x^{10}| \quad \text{för alla } x > N. \qquad (*)$$

Om detta vore sant skulle

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{10}} \le \lim_{x\to\infty} C = C < \infty.$$

Men eftersom vi vet att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{10}} = \infty,$$

så kan inte $(*)$ vara uppfylld, d.v.s.

$$e^x \ne O(x^{10}) \quad \text{då } x \to \infty.$$

Visa att

$$\big(x+1+O(\tfrac{1}{x})\big)^x = ex^x + O(x^{x-1}) \quad \text{då } x \to \infty.$$

I varje steg använder vi antingen räknereglerna för ordo, Maclaurinutveckling eller en vanlig omskrivning, så fundera noga över varje likhet.

$$\begin{aligned}
\big(x+1+O(\tfrac{1}{x})\big)^x &= \exp\Big(x\log\big(x+1+O(\tfrac{1}{x})\big)\Big)\\
&= \exp\Big(x\log x + x\log\big(1+\tfrac{1}{x}+O(\tfrac{1}{x^2})\big)\Big)\\
&= x^x\cdot\exp\Big(x\log\big(1+\tfrac{1}{x}+O(\tfrac{1}{x^2})\big)\Big)\\
&= x^x\cdot\exp\Big(x\big(\tfrac{1}{x}+O(\tfrac{1}{x^2})\big)\Big)\\
&= x^x\cdot\exp\Big(1+O(\tfrac{1}{x})\Big) = x^x\cdot\exp(1)\cdot\exp\Big(O(\tfrac{1}{x})\Big)\\
&= ex^x\Big(1+O(\tfrac{1}{x})\Big) = ex^x + O(x^{x-1}).
\end{aligned}$$

4.9.2 Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\log(2x-3)}{x^2-4}$.

Vi använder l'Hôpitals regel,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log(2x-3)}{x^2-4} = \big\{\tfrac{0}{0};\ \text{l'Hôpitals regel}\big\} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{2x-3}}{2x} = 1/2.$$

Egentligen är vårt skrivsätt lite oegentligt. Vi vet inte om vi kan använda l'Hôpitals regel förrän vi visat att högerledets gränsvärde existerar (eller är lika med $\pm\infty$).

4.9.4 Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

Vi Maclaurinutvecklar,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\big(1-\frac{1}{2}a^2x^2+O(x^4)\big)}{1-\big(1-\frac{1}{2}b^2x^2+O(x^4)\big)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}a^2x^2+O(x^4)}{\frac{1}{2}b^2x^2+O(x^4)} = \{\text{förkorta med } x^2\}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}a^2+O(x^2)}{\frac{1}{2}b^2+O(x^2)} = \frac{a^2}{b^2}.
\end{aligned}$$

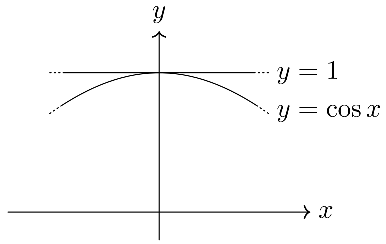
4.9.6 Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^{1/3}-1}{x^{2/3}-1}$.

I detta exempel ser vi att nämnaren kan faktoriseras så att täljaren kan förkortas bort,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{1/3}-1}{x^{2/3}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^{1/3}-1}{(x^{1/3}-1)(x^{1/3}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x^{1/3}+1} = 1/2.$$

4.9.8 Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\log(1+x^2)}$.

Om vi tittar på täljaren och kommer ihåg hur cosinus-funktionen ser ut nära 0



så ser vi att uttrycket $1-\cos x$ har ett högre ordningens nollställe i $x=0$. Om vi använder l'Hôpitals regel kommer vi bli tvungna att derivera flera gånger. Eftersom vi vet täljarens och nämnarens Maclaurinutveckling väljer vi att Maclaurinutveckla,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\log(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\bigl(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)\bigr)}{x^2+O(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+O(x^4)}{x^2+O(x^4)}$$
$$=\{\text{förkorta med } x^2\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+O(x^2)}{1+O(x^2)}=1/2.$$

Anm. Givetvis går det bra att använda l'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\log(1+x^2)}=\{\tfrac{0}{0}\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{2x}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+x^2)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$$
$$=\{\tfrac{0}{0}\}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=1\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}.$$

4.9.10 Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^x-e^x}{x}$.

Nämnaren har ett enkelt nollställe så det lutar kanske åt l'Hôpitals regel. Dessutom är Maclaurinutvecklingen av 10^x inte direkt åtkomlig ur närminnet. Vi använder l'Hôpitals regel!

$$\lim_{x\to 0}\frac{10^x-e^x}{x}=\bigl\{\tfrac{0}{0};\ \text{l'Hôpitals regel}\bigr\}=\lim_{x\to 0}\frac{10^x\cdot\log x-e^x}{1}=\log 10-1.$$

4.9.12 Beräkna $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log(ex)-1}{\sin\pi x}$.

Nämnaren har ett enkelt nollställe i $x=1$ så det lutar åt l'Hôpitals regel. Dessutom är Taylorutvecklingen av nämnaren och täljaren kring $x=1$ inga inlärda formler. Vi använder l'Hôpitals regel,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(ex)-1}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{\pi\cos\pi x}=-\frac{1}{\pi}.$$

4.9.14 Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Nämnaren har ett 3:e ordningens nollställe i $x=0$, så vi använder Maclaurinutveckling.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\bigl(x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)\bigr)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+O(x^5)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\bigl(\tfrac{1}{6}+O(x^2)\bigr)=\tfrac{1}{6}.$$

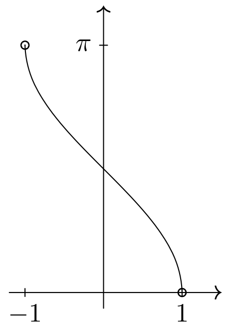
4.9.18 Beräkna $\lim\limits_{r\to\pi/2}\dfrac{\log\sin r}{\cos r}$.

Cosinus-funktionen har bara enkla nollställen varför vi provar med l'Hôpitals regel,

$$\lim_{r\to\pi/2}\frac{\log\sin r}{\cos r}=\lim_{r\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\sin r}\cdot\cos r}{-\sin r}=\lim_{r\to\pi/2}-\frac{\cos r}{\sin^2 r}=0.$$

4.9.20 Beräkna $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\arccos x}{x-1}$.

Grafen till arccos-funktionen har utseendet



d.v.s. en lodrät tangent vid $x = 1$. Detta utesluter Taylorutveckling. Vi använder l'Hôpitals regel,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{x-1} = \left\{\tfrac{0}{0};\ \text{l'Hôpitals regel}\right\} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = -\infty.$$

4.9.24 Beräkna $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$.

Gränsvärdet har det obestämda uttrycket 0^0. Det första vi bör göra är att logaritmera för att få uttrycket i en mer "vanlig" form.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \exp\Bigl(\sqrt{x}\cdot\log x\Bigr) = \bigl\{\text{exp är kontinuerlig}\bigr\}\\ &= \exp\Bigl(\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\cdot\log x\Bigr)\end{aligned}$$

Gränsvärdet är fortfarande inte i en form som vi kan använda våra standardtekniker på, men en enkel omskrivning gör susen!

$$\begin{aligned}&= \exp\Bigl(\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/\sqrt{x}}\Bigr) = \bigl\{\tfrac{\infty}{\infty};\ \text{l'Hôpitals regel}\bigr\}\\ &= \exp\Bigl(\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{\frac{-1/2}{x\sqrt{x}}}\Bigr) = \exp\Bigl(\lim_{x\to 0^+} -2\sqrt{x}\Bigr) = \exp 0 = 1.\end{aligned}$$

Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$.

Om vi använder l'Hôpitals regel fås

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} \overset{?}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty} (1+\cos x) \quad \text{divergerar.}$$

Eftersom gränsvärdet i högerledet divergerar kan vi inte använda l'Hôpitals regel.

En alternativ metod ger istället gränsvärdet,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \Bigl(1+\frac{\sin x}{x}\Bigr) = 1+0 = 1.$$

9.8.2 Skatta felet om Maclaurinpolynomet av grad 6 till $\cos x$ används för att approximera $\cos 0{,}1$.

Resttermen är

$$R_7(x) = \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}(x-0)^7,$$

där ξ ligger mellan 0 och x. I vårt fall är $f(x) = \cos x$. Genom att observera att $f'' = -f$ får vi att

$$f^{(7)} = (f'')^{(5)} = -f^{(5)} = -(f'')^{(3)} = +f^{(3)} = (f'')' = -f'.$$

Alltså är

$$f^{(7)}(x) = \sin x.$$

Resttermen är därmed

$$R_7(x) = \frac{\sin \xi}{7!} x^7$$

och felet i vår approximation kan vi skatta till

$$|R_7(1)| = \left| \frac{\sin \xi}{7!} 1^7 \right| \le \frac{\sin 1}{7!} \le \frac{1}{7!} \approx 2 \cdot 10^{-4}.$$

9.8.8 Använd Taylors formel för att bestämma Maclaurinserien till funktionen $f(x) = e^{-x}$.

Enligt Taylors formel är

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

där ξ_n ligger mellan 0 och x. Om vi kan visa att resttermen$\to 0$ då $n \to \infty$ så får vi

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n e^{-\xi_n}}{n!} x^n \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n e^{-\xi_n}}{n!} x^n}_{=0} \\ &= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \cdots . \end{aligned}$$

Det återstår alltså att undersöka gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n e^{-\xi_n}}{n!} x^n$$

där ξ_n alltid ligger mellan 0 och x (men varierar med n).

Vi har att

$$\left| \frac{(-1)^n e^{-\xi_n}}{n!} x^n \right| \le \frac{e^{|x|} |x|^n}{n!}.$$

Uttrycket i högerledet går mot noll då $n \to \infty$ och då följer av instängningsprincipen att resttermen $R_n(x)$ går mot 0 då $n \to \infty$. Maclaurinserien är alltså

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \cdots .$$

9.8.10 Använd Taylors formel för att bestämma Maclaurinserien till funktionen $f(x) = \cos x$.

Enligt Taylors formel är

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{f^{(2n+1)}(\xi_{2n+1})}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

där ξ_{2n+1} ligger mellan 0 och x. Vi ska visa att resttermen $\to 0$ då $n \to \infty$. Eftersom $f'' = -f$ får vi att

$$f^{(2n+1)}(x) = \pm f'(x) = \pm \sin x.$$

Alltså är feltermen

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\pm \sin \xi_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Vi har att

$$|R_{2n+1}(x)| = \left|\frac{\pm\sin\xi_{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right| \le \frac{1}{(2n+1)!}|x|^{2n+1}.$$

Eftersom högerledet $\to 0$ då $n \to \infty$ ger instängningsprincipen att $R_{2n+1}(x) \to 0$ då $n \to \infty$. Maclaurinserien är alltså

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Låt $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ vara de positiva rötterna till ekvationen

$$\tan x = x.$$

Visa att $x_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2} + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ då $n \to \infty$.

Den som löser ovanstående uppgift till lektionen den 16 november 1999 får en present, men detta gäller bara en person. Om flera lösningar inkommer så får den som gjort den bästa lösningen priset.