Lektion 16, Envariabelanalys den 30 november 1999

9.1.2 Avgör om följden

$$\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$$

är

a) begränsad (ovanifrån eller underifrån),

b) positiv eller negativ (så småningom),

c) växande, avtagande eller alternerande,

d) konvergent, divergent eller divergent mot $\pm\infty$.

a) Vi kan skriva om formeln något

$$\frac{2n}{n^2+1} = \frac{2}{n+1/n}.$$

Eftersom indexet n går från 1 och uppåt så får vi någontig större om vi ersätter n med 1,

$$\frac{2}{n+1/n} \le \frac{2}{1+1/n}.$$

Termen $1/n$ i nämnaren är alltid positiv, så den kan vi ersätta med 0 och få ett större uttryck,

$$\frac{2}{1+1/n} \le \frac{2}{1+0} = 2.$$

Alltså har vi visat att

$$\frac{2n}{n^2+1} \le 2 \quad \text{för alla } n,$$

d.v.s. talföljden är begränsad ovanifrån av 2. Å andra sidan är täljaren och nämnaren alltid positiva, varför vi har att

$$\frac{2n}{n^2+1} \ge 0 \quad \text{för alla } n,$$

d.v.s. talföljden är begränsad underifrån av 0. Talföljden är alltså begränsad.

b) Enligt a-uppgiften är följden alltid positiv.

c) I exempel 3 avsnitt 9.1 undersöks just denna följd och där visas att följden är avtagande, men låt oss istället gå tillbaka till definitionen av en avtagande följd och visa att definitionen är uppfylld.

Vi vill alltså visa att

$$a_{n+1} \le a_n \qquad \text{för alla } n \ge N,$$

där N är något lämpligt heltal. Skriver vi ut vad denna olikhet betyder i vårt fall så får vi

$$\frac{2(n+1)}{(n+1)^2+1} \overset{?}{\le} \frac{2n}{n^2+1} \qquad \text{för alla } n \ge N. \tag{$*$}$$

Vi har skrivit ett frågetecken ovanför olikhetstecknet för att markera att det är denna olikhet vi vill visa. Vi får en ekvivalent olikhet om vi förlänger med $(n+1)^2+1$ och n^2+1 (båda är positiva),

$$2(n+1)(n^2+1) \overset{?}{\le} 2n\big((n+1)^2+1\big).$$

Vi förenklar och samlar termerna i ena ledet,

$$2n^2+2n-2 \overset{?}{\ge} 0.$$

För att se om denna olikhet är uppfylld kvadratkompletterar vi

$$2\big(n+\tfrac{1}{2}\big)^2 - \tfrac{5}{2} \overset{?}{\ge} 0. \tag{$\dagger$}$$

Av denna formel ser vi att vänsterledet har ett minimum i $n=-\frac{1}{2}$, men är växande för $n > -\frac{1}{2}$. Om därför ($\dagger$) gäller för ett visst positivt n så gäller olikheten även för alla index större än n. I detta fall gäller olikheten fr.o.m. $n=1$,

$$\big(1+\tfrac{1}{2}\big)^2 - \tfrac{5}{4} = \tfrac{9}{4} - \tfrac{5}{4} = 1 > 0,$$

så ($*$) är uppfylld för alla $n \ge 1$.

d) Vi har

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = \{\text{förläng med } 1/n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1/n} = 0.$$

9.1.18 Beräkna gränsvärdet av följden

$$a_n = \frac{n^2 - 2\sqrt{n} + 1}{1 - n - 3n^2}.$$

Vi beräknar gränsvärdet precis på samma sätt som när vi har gränsvärden av funktioner.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2\sqrt{n} + 1}{1 - n - 3n^2} = \{\text{förläng med } 1/n^2\}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2\,n^{-3/2} + n^{-2}}{n^{-2} - n^{-1} - 3} = \frac{1 - 0 + 0}{0 - 0 - 3} = -1/3.\end{aligned}$$

9.1.24 Beräkna gränsvärdet av följden

$$a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}.$$

Om vi tittar på formeln för a_n,

$$a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n},$$

så ser vi att den är en differens mellan två termer varav den ena är ett kvadratrotsuttryck. Standardtricket i dessa fall är att förlänga med uttryckets konjugat,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{\bigl(n - \sqrt{n^2 - 4n}\,\bigr)\bigl(n + \sqrt{n^2 - 4n}\,\bigr)}{n + \sqrt{n^2 - 4n}}\\ &= \frac{n^2 - (n^2 - 4n)}{n + \sqrt{n^2 + 4n}} = \frac{4n}{n + \sqrt{n^2 - 4n}}.\end{aligned}$$

Vi får alltså att

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{n + \sqrt{n^2 - 4n}} = \{\text{ förläng med } 1/n\ \}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - 4/n}} = \frac{4}{1+1} = 2.\end{aligned}$$

9.1.26 Beräkna gränsvärdet av följden

$$a_n = \Bigl(\frac{n-1}{n+1}\Bigr)^n.$$

För stora n går basen i potensuttrycket mot 1 medan exponenten går mot ∞. Vi har alltså en tävlan mellan hur snabbt basen går mot 1 och exponenten mot ∞. Utgången av denna tävlan avgör gränsvärdet.

Ett vanligt trick när man har stora produkter eller potensuttryck är att logaritmera. Vi skriver alltså om uttrycket till

$$a_n = \Bigl(\frac{n-1}{n+1}\Bigr)^n = \exp\Bigl\{n\log\Bigl(\frac{n-1}{n+1}\Bigr)\Bigr\}.$$

Argumentet till logaritmen går mot 1 och det kan vi se tydligare om vi skriver om argumentet något,

$$\begin{aligned}&= \exp\Bigl\{n\log\Bigl(\frac{n+1-2}{n+1}\Bigr)\Bigr\}\\ &= \exp\Bigl\{n\log\Bigl(1 - \frac{2}{n+1}\Bigr)\Bigr\}.\end{aligned}$$

Den andra termen i logaritmens argument går mot 0. För argument nära 1 vet vi enligt Maclaurinutvecklingen att logaritmen har utseendet

$$\log(1+\varepsilon) = \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

I vårt fall innebär detta att

$$\log\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big) = -\frac{2}{n+1} + O\Big(\frac{1}{(n+1)^2}\Big).$$

Därmed är

$$\begin{aligned} a_n &= \exp\Big\{n\Big(-\frac{2}{n+1} + O\Big(\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\Big)\Big\} \\ &= \exp\Big\{-2\,\frac{n}{n+1} + O\Big(\frac{n}{(n+1)^2}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Låter vi $n \to \infty$ fås

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \exp\Big\{-2\,\frac{n}{n+1} + O\Big(\frac{n}{(n+1)^2}\Big)\Big\} \\ &= \{\text{ exp är kontinuerlig }\} \\ &= \exp\Big\{\lim_{n\to\infty}\Big(-2\,\frac{n}{n+1} + O\Big(\frac{n}{(n+1)^2}\Big)\Big)\Big\} \\ &= \exp\{-2+0\} = e^{-2}. \end{aligned}$$

9.2.2 Beräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\big(-\tfrac{1}{4}\big)^{n-1}$ eller visa att serien divergerar.

Serien är en geometrisk serie med basen $-\frac{1}{4}$. Summan är

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\big(-\tfrac{1}{4}\big)^{n-1} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\big(-\tfrac{1}{4}\big)^{n-1} = 3\,\frac{1}{1-\big(-\frac{1}{4}\big)} = \tfrac{12}{5}.$$

9.2.4 Beräkna $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}}$ eller visa att serien divergerar.

Serien är faktiskt en geometrisk serie, vilket vi lättare ser om vi skriver om summanden lite,

$$\frac{5}{10^{3n}} = \frac{5}{\big(10^3\big)^n}.$$

Innan vi sätter igång och använder formeln för en geometrisk serie noterar vi att vår serie inte riktigt överensstämmer med formeln

$$\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1} = \frac{a}{1-x}.$$

Vårt startindex är 0 istället för 1 och dessutom har vi n i exponenten istället för $n-1$. För att få rätt startindex gör vi en indexförskjutning

$$5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\big(10^3\big)^n} = \left\{\begin{matrix} k = n+1 \\ n = k-1 \end{matrix}\right\} = 5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\big(10^3\big)^{k-1}}.$$

Problemet med exponenten löste sig själv. Summan av serien är nu

$$5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\big(10^3\big)^{k-1}} = \frac{5}{1-1/10^3} = \frac{5000}{999}.$$

9.2.10 Beräkna $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3+2^n}{3^{n+2}}$ eller visa att serien divergerar.

Summanden består av två termer, så vi kan dela upp summan i två delar

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{3^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+2}}. \qquad (*)$$

Eftersom serierna är positiva så är uppdelningen $(*)$ alltid giltig. Den första serien i högerledet är en geometrisk serie med summan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{2}.$$

Den andra serien är också en geometrisk serie, vilket vi enklare kan se efter en omskrivning,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^2}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{3}.$$

Sammanlagt har vi alltså

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{6}.$$

9.2.16 Beräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$ eller visa att serien divergerar.

Termerna verkar misstänksamt stora. Vi har att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2/n} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

I en konvergent serie måste termerna gå mot 0, så vår serie måste vara divergent.

9.2.18 Beräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$ eller visa att serien divergerar.

I detta fall ser vi att termerna går mot 0 då $n \to \infty$, så vi kan inte direkt avfärda serien som divergent.

Serien är dock misstänkt lik den harmoniska serien, som vi vet är divergent. Eftersom den harmoniska serien ligger nära gränsen till att konvergera så måste vi vara försiktiga när vi ska jämföra serien med den harmoniska serien. Vi har

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Vi gör en indexförskjutning så att summanden ser exakt ut som den harmoniska serien

$$= \left\{ \begin{matrix} k = n+1 \\ n = k-1 \end{matrix} \right\} = 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Vår serie är alltså den harmoniska serien utan den första termen. Alltså är serien divergent.

9.3.2 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-2}$ konvergerar eller divergerar.

När man får en serie av den här typen brukar man börja med en informell undersökning av termernas storleksordning för stora n. I en sådan undersökning försummar man deluttryck som man vet är mycket mindre än de mera dominerande delarna av uttrycket. I vårt fall är

$$\begin{matrix} n \approx n \\ n^4 - 2 \approx n^4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{n^4-2} \approx \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3},$$

d.v.s. för stora n liknar termerna i vår serie termerna i den konvergenta p-serien $\sum \frac{1}{n^3}$. Eftersom konvergensen av en serie avgörs av utseendet av termer för stora n, så borde vår serie också vara konvergent.

Ett sätt att realisera detta resonemang är att använda jämförelseprincipen. Vi ska då undersöka gränsvärdet av kvoten mellan termerna i vår serie och den välkänt konvergenta serien,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{n^4-2}}{\dfrac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-2/n^4} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Eftersom gränsvärdet är ändligt och jämförelseserien är konvergent, så är vår serie konvergent enligt jämförelseprincipen.

9.3.4 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$ konvergerar eller divergerar.

Precis som i förra uppgiften gör vi först en informell undersökning av termernas storleksordning för stora n. För stora n är

$$\begin{aligned} \sqrt{n} &\approx \sqrt{n} \\ n^2+n+1 &\approx n^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1} \approx \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Termerna är alltså jämförbara med termerna i den konvergenta serien $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$. Gränsvärdet av kvoten mellan våra termer och $1/n^{3/2}$ är

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n+1/n^2} = \frac{1}{1+0+0} = 1.$$

Jämförelseprincipen ger nu att eftersom gränsvärdet är ändligt och serien vi jämför med är konvergent så är vår serie konvergent.

9.3.8 Bestäm om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 3n}$ konvergerar eller divergerar.

Man måste ha en känsla för olika funktioners storleksordningar. Logaritmfunktionen växer alltid långsamt i jämförelse med termer av typen n^{ε}, oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ vi väljer. Alltså är termerna i serien $\sum 1/\log 3n$, för stora n, större än termerna i t.ex. den harmoniska serien $\sum 1/n$. Eftersom den harmoniska serien är divergent så borde vår serie också divergera.

Vi jämför därför vår serie med den harmoniska serien,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\log 3n}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n + \log 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{\log n}{n} + \dfrac{\log 3}{n}} = \infty.$$

Jämförelseprincipen ger nu att vår serie är divergent.

9.3.10 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{2+n}$ konvergerar eller divergerar.

För stora n är

$$\frac{1+n}{2+n} \approx \frac{n}{n} = 1,$$

d.v.s. termerna går inte ens mot 0 och serien kan då inte vara konvergent. Alltså: Eftersom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n+1}{2/n+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

är serien divergent.

9.3.12 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$ konvergerar eller divergerar.

Vi undersöker termernas storleksordning för stora n,

$$\frac{n^2}{1+n\sqrt{n}} \approx \frac{n^2}{n\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Inte nog med att termerna inte går mot noll, de går mot ∞, och då kan inte serien vara konvergent.

Sammanfattningsvis, eftersom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \infty,$$

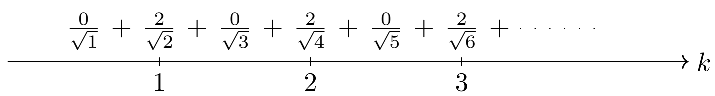
så är serien divergent.

9.3.16 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergerar eller divergerar.

Uttrycket $(-1)^n$ alternerar mellan -1 och $+1$, så summandens täljare $1+(-1)^n$ alternerar mellan 0 och 2. Varannan term är alltså noll,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{0}{\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{0}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{4}} + \frac{0}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \cdots$$

För att få en serie med rent positiva termer tar vi bort alla noll-termer och indexerar om serien



Med denna indexering blir serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2k}} = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Detta är en välkänd p-serie, och den är divergent.

9.3.18 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$ konvergerar eller divergerar.

Det här talet handlar om vilken storleksordning som $n!$ har i jämförelse med n^4. En tumregel är hierarkin

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^a \gg 1, \qquad (*)$$

där $a > 1$. Med beteckningen $\gg$ menar vi att det vänstra ledet växer fortare än det högra ledet, så fort att kvoten mellan dem går mot 0. I vårt fall är alltså

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n!} = 0.$$

Frågan blir då om termerna avtar tillräckligt fort för att serien ska konvergera.

För att besvara denna fråga ska vi använda jämförelseprincipen och vårt hierarki $(*)$. Vi ska jämföra vår serie med den konvergenta p-serien $\sum 1/n^2$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^4}{n!}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6}{n!}$$

Eftersom vi vet att $n! \gg n^6$ blir gränsvärdet ovan 0. Jämförelseprincipen ger nu att vår serie är konvergent.