Lektion 4, Envariabelanalys den 30 september 1999

2.6.2 Åskådliggör medelvärdessatsen genom att finna en punkt i det öppna intervallet $(1,2)$ där tangentlinjen till $y = 1/x$ är parallell med kordan mellan punkterna $(1,1)$ och $(2,1/2)$.

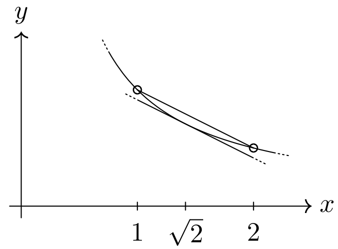
Kordan mellan $(1,1)$ och $(2,1/2)$ har lutningen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1/2-1}{2-1} = -1/2.$$

Vi söker alltså en punkt i intervallet $(1,2)$ där tangenten har lutning $-1/2$, d.v.s. där y:s derivata är $-1/2$,

$$y'(x) \equiv -\frac{1}{x^2} = -1/2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Av dessa två punkter är det bara $x = \sqrt{2}$ som tillhör intervallet $(1,2)$.



2.6.6 Låt $r > 1$. Om $x > 0$ eller $-1 \le x < 0$, visa att

$$(1+x)^r > 1 + rx.$$

Sätt $f(x) = (1+x)^r$. Vi undersöker de olika x-värdena.

$x > 0$: Vi använder medelvärdessatsen på funktionen f i intervallet $[0, x]$,

$$\frac{(1+x)^r - 1^r}{x-0} = r(1+\xi)^{r-1}$$

där $0 < \xi < x$. Eftersom $\xi > 0$ är högerledet alltid större än

$$r(1+0)^{r-1} = r.$$

Alltså har vi att

$$\frac{(1+x)^r - 1}{x} > r.$$

Multiplikation med x (positiv) ger att

$$(1+x)^r - 1 > rx.$$

Addition med 1 ger slutligen att

$$(1+x)^r > 1 + rx.$$

$-1 \le x < 0$: Vi använder medelvärdessatsen på funktionen f i intervallet $[x, 0]$,

$$\frac{1^r - (1+x)^r}{0-x} = r(1+\xi)^{r-1}$$

där $x < \xi < 0$. Eftersom $\xi < 0$ är högerledet alltid mindre än

$$r(1+0)^{r-1} = r.$$

Alltså har vi att

$$\frac{(1+x)^r - 1}{x} < r.$$

Multiplicera med x (negativ),

$$(1+x)^r - 1 > rx,$$

och addera 1,

$$(1+x)^r > 1 + rx.$$

Visa att $e^x \cos x > 1$ för $0 < x < \pi/4$.

Sätt $f(x) = e^x \cos x$. Vi använder medelvärdessatsen på f i intervallet $[0, x]$,

$$\frac{e^x \cos x - 1}{x - 0} = f'(\xi) = e^{\xi}(\cos\xi - \sin\xi),$$

där $0 < \xi < x$. Om vi kan visa att högerledet är positivt oavsett var ξ ligger i intervallet $(0, x)$, då har vi visat att

$$\frac{e^x \cos x - 1}{x} > 0 \qquad \text{d.v.s.} \qquad e^x \cos x > 1.$$

Vi behöver alltså visa att

$$e^{\xi}(\cos\xi - \sin\xi) > 0 \qquad \text{då} \ \ 0 < \xi < x < \pi/4.$$

Eftersom exponentialfunktionen alltid är positiv räcker det om vi visar att

$$\cos\xi - \sin\xi > 0 \qquad \text{då} \ \ 0 < \xi < \pi/4.$$

Med hjälp av additionsformler kan vänsterledet skrivas om till

$$\sqrt{2}\,\cos(\xi + \pi/4) > 0 \qquad \text{då} \ \ 0 < \xi < \pi/4.$$

Vi vet att cosinus-funktionen är positiv på intervallet $(0, \pi/2)$ och därför är $\cos(\xi + \pi/4)$ positiv på intervallet $(0, \pi/4)$. Vi har alltså visat det vi skulle och uppgiften är klar.

Anm. Olikheten gäller inte bara för x i intervallet $(0, \pi/4)$ utan detta intervall kan göras större. Vårt angreppssätt med medelvärdessatsen ger alltså inte det optimala resultatet. (Problemet är att vi inte vet var i intervallet $(0, x)$ som ξ hamnar.)

Bestäm $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$ för $x > 0$.

Vi byter först variabel i gränsvärdet till $t = 1/n$. När $n \to \infty$ får vi att $t \to 0^+$. Gränsvärdesuttrycket blir

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{x^t - 1}{t}.$$

Denna kvot kan tolkas som en differenskvot. Om vi sätter $f(t) = x^t$ så kan gränsvärdet skrivas som

$$\lim_{t\to +} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}.$$

Med medelvärdessatsen får vi ett $0 < \xi_t < t$ så att gränsvärdet är

$$\lim_{\xi_t\to 0^+} f'(\xi_t) = \lim_{\xi_t\to 0^+} x^{\xi_t}\log x = \log x.$$

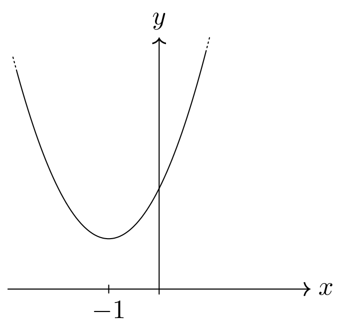
2.6.8 Finn intervallen där $f(x) = x^2 + 2x + 2$ är växande respektive avtagande.

Derivatan ges av $f'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$. Vi ser att

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \quad \text{om } x \geq -1,\\ f'(x) &\leq 0 \quad \text{om } x \leq -1. \end{aligned}$$

Alltså är f

växande	på $[-1, \infty)$,
avtagande	på $(-\infty, -1]$.



2.6.12 Finn intervallen där $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ är växande respektive avtagande.

Derivatan ges av

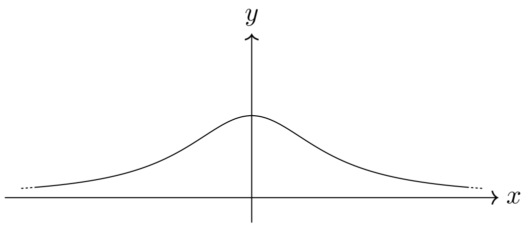
$$f'(x) = -1 \cdot (x^2+1)^{-2} \cdot (2x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Nämnaren är positiv varför täljaren avgör tecknet

$$\begin{aligned} f'(x) &\le 0 \quad \text{om } x \ge 0,\\ f'(x) &\ge 0 \quad \text{om } x \le 0. \end{aligned}$$

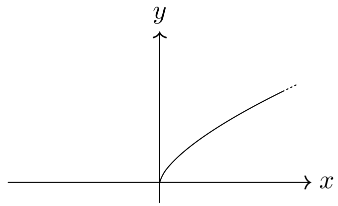
Alltså är f

växande	på	$(-\infty, 0]$,
avtagande	på	$[0, \infty)$.



Utred om $y = x^{2/3}$ kan definieras för negativa x, och om så är fallet, förklara hur man beräknar funktionen för negativa x.

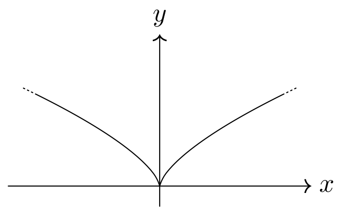
Om vi ritar upp grafen till $y = x^{2/3}$ för $x \ge 0$ så har den utseendet



När vi ska undersöka funktionen $y = x^{2/3}$ är det viktigt att veta att funktionen egentligen definieras av det implicita sambandet

$$y^3 = x^2. \tag{$*$}$$

I detta samband noterar vi att om x ersätts med $-x$ så är sambandet fortfarande uppfyllt. Om vi ritar upp alla punkter (x, y) som uppfyller $(*)$ så får vi därför en figur som är symmetrisk kring y-axeln.



I denna figur ser vi att vi kan definiera $y = x^{2/3}$ även för negativa x.

När vi ska räkna ut denna funktion använder vi symmetrin kring y-axeln, d.v.s. att funktionen är jämn,

$$y(-x) = y(x).$$

Speciellt är $y(-1) = (-1)^{2/3} = (+1)^{2/3} = 1$.

Anm. I allmänhet kan funktionen $x \mapsto x^\alpha$ definieras för negativa x om $\alpha = \frac{k}{2n+1}$ för några heltal k och n.

Visa att $f(x) = x^{1/3}$ är strängt växande.

Vi delar först upp den udda funktionen i en del för positiva x och en del för negativa x,

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/3} & \text{om } x > 0, \\ 0 & \text{om } x = 0, \\ -(-x)^{1/3} & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Fördelen med denna formel är att basen alltid är positiv och då kan vi använda potenslagarna utan eftertanke.

Vi gör nu som i tidigare uppgifter och deriverar

$$\begin{aligned} x > 0: &\quad f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} = \tfrac{1}{3}\frac{1}{\left(x^{1/3}\right)^2} > 0, \\ x < 0: &\quad f'(x) = -\tfrac{1}{3}(-x)^{-2/3} \cdot (-1) = \tfrac{1}{3}\frac{1}{\left((-x)^{1/3}\right)^2} > 0. \end{aligned}$$

Alltså är f strängt växande på $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$. Eftersom f är kontinuerlig är den strängt växande på hela $\mathbf{R}$.

För vilka x gäller olikheten

$$1 - \varepsilon < 1 - (x-2)^3 < 1 + \varepsilon.$$

Detta är den olikhet vi stötte på i det andra exemplet från lektion 1. Denna gång ska vi betrakta lösandet av olikheten ur ett litet annorlunda perspektiv.

$$1 - \varepsilon < 1 - (x-2)^3 < 1 + \varepsilon$$

Det första steget är att vi multiplicerar alla led med -1. Detta kan ses som att vi använder funktionen $x \mapsto -x$ på alla led och betraktar istället den resulterande olikheten mellan funktionsvärdena. Vi kan garantera att denna nya olikhet är ekvivalent med den gamla, om funktionen vi använder är strängt monoton. Eftersom $x \mapsto -x$ är strängt avtagande är den speciellt strängt monoton. Dessutom kastas olikhetstecknen om i den nya olikheten, och vi får

$$-1 + \varepsilon > -1 + (x-2)^3 > -1 - \varepsilon.$$

Sedan adderar vi 1, vilket är detsamma som att vi använder funktionen $x \mapsto x+1$. Eftersom denna funktion är strängt växande blir den ekvivalenta olikheten för funktionsvärdena

$$\varepsilon > (x-2)^3 > -\varepsilon.$$

Det tredje steget är att ta tredje roten ur. Funktionen i detta fall är $x \mapsto x^{1/3}$. I den tidigare uppgiften visade vi att $x \mapsto x^{1/3}$ är strängt växande varför olikheten blir

$$\sqrt[3]{\varepsilon} > x - 2 > -\sqrt[3]{\varepsilon}.$$

Det sista steget är att addera 2, d.v.s. använda funktionen $x \mapsto x + 2$ (strängt växande),

$$2 + \sqrt[3]{\varepsilon} > x > 2 - \sqrt[3]{\varepsilon}.$$

2.9.4 Räkna ut $\dfrac{dy}{dx}$ i termer av x och y om

$$x^2 + 4(y-1)^2 = 4.$$

Vi betraktar y som en funktion av x och deriverar med avseende på x,

$$2x + 4 \cdot 2(y-1)y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{-2x}{8(y-1)} = \frac{-x}{4(y-1)}.$$

2.9.10 Finn ekvationen för tangenten till kurvan

$$x^2y^3 - x^3y^2 = 12$$

i punkten $(-1,2)$.

Tangentens lutning ges av $y'(-1)$. Vi deriverar det implicita sambandet med avseende på x,

$$2xy^3 + x^2 3y^2y' - \bigl(3x^2y^2 + x^3 2yy'\bigr) = 0.$$

Vi samlar ihop y' i ena ledet

$$(3x^2y^2 - 2x^3y)y' = 3x^2y^2 - 2xy^3 \quad\Leftrightarrow\quad y' = \frac{3x^2y^2 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 2x^3y}.$$

I punkten $(x,y) = (-1,2)$ är

$$y'(-1) = \frac{3\cdot(-1)^2\cdot 2^2 - 2\cdot(-1)\cdot 2^3}{3\cdot(-1)^2\cdot 2^2 - 2\cdot(-1)^3\cdot 2} = 7/4.$$

Alltså har tangenten lutning $7/4$ och därmed ekvationen

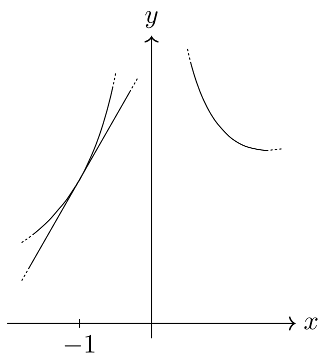
$$y = \tfrac{7}{4}x + m,$$

där m bestäms av att tangentlinjen går genom punkten $(-1,2)$

$$2 = \tfrac{7}{4}\cdot(-1) + m \quad\Leftrightarrow\quad m = \tfrac{15}{4}.$$

Tangentens ekvation är därmed

$$y = \tfrac{7}{4}x + \tfrac{15}{4}.$$



2.9.12 Finn ekvationen för tangentlinjen till kurvan

$$x + 2y + 1 = \frac{y^2}{x-1}$$

i punkten $(2,-1)$.

Tangentens lutning ges av $y'(2)$. Vi deriverar det implicita sambandet med avseende på x,

$$1 + 2y' = \frac{2yy'\cdot(x-1) - y^2\cdot 1}{(x-1)^2}.$$

Samla y' i ena ledet

$$\Bigl(2 - \frac{2y}{x-1}\Bigr)y' = -\frac{y^2+(x-1)^2}{(x-1)^2} \quad\Leftrightarrow\quad y' = \frac{-\dfrac{y^2+(x-1)^2}{(x-1)^2}}{2 - \dfrac{2y}{x-1}} = -\frac{y^2+(x-1)^2}{2(x-1)(x-y-1)}.$$

I punkten $(x,y) = (2,-1)$ är

$$y'(2) = -\frac{(-1)^2 + (2-1)^2}{2\cdot(2-1)\cdot(2-(-1)-1)} = -1/2.$$

Alltså har tangentlinjen ekvationen

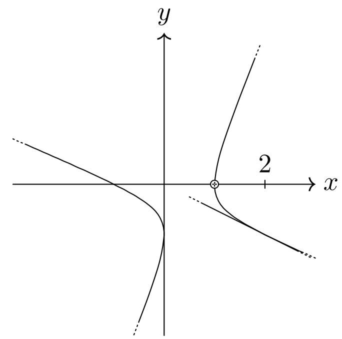
$$y = -\tfrac{1}{2}x + m,$$

där m bestäms av att tangenten går genom punkten $(2,-1)$,

$$-1 = -\tfrac{1}{2}\cdot 2 + m \quad\Leftrightarrow\quad m = 0.$$

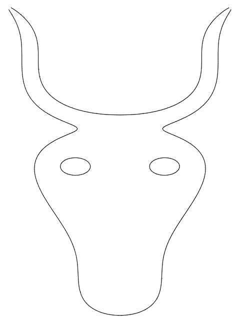
Därmed är tangentens ekvation

$$y = -\tfrac{1}{4}x.$$



Efterord

Med hjälp av implicita funktioner kan man avbilda många olika typer av kurvor, faktiskt fler än vad man kan tro. Nedan är den s.k. *tjuroiden* uppritad.



$$\left(-\frac{97}{252}y^4-\frac{2}{7}y^3+\frac{985}{4032}y^2+\frac{2}{7}y+\frac{9}{64}-x^2\right)\left(2x^2+100\left(\left(y-\frac{439}{250}\right)^3-x^2+\frac{1}{3}\right)^2-1\right)\left(\left(x+\frac{7}{25}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{1}{100}\right)\left(\left(x-\frac{7}{25}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{1}{100}\right)+\frac{1}{100}=0$$