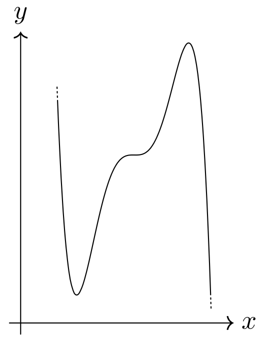
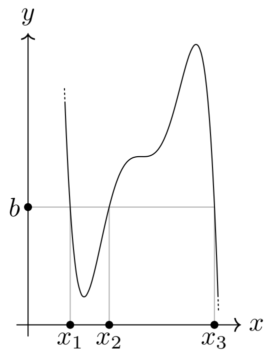
Lektion 6, Envariabelanalys den 14 oktober 1999

Låt f vara en kontinuerligt deriverbar funktion vars graf är återgiven i figuren till höger. Besvara följande frågor

1. Har f en invers?
2. I vilka punkter har f en lokal invers?
3. Vilka är intervallen där f är en-entydig?
4. Vilka grenar finns det till f^{-1}?



1. Säg att vi tar en punkt $y = b$, i f:s värdemängd, som i figuren nedan.

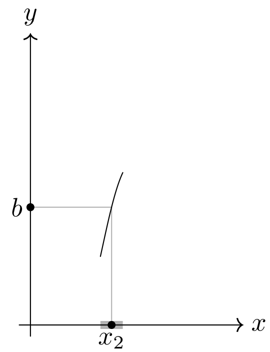


I f:s definitionsmängd finns nu tre punkter x_1, x_2 och x_3 som alla har funktionsvärdet b,

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = b.$$

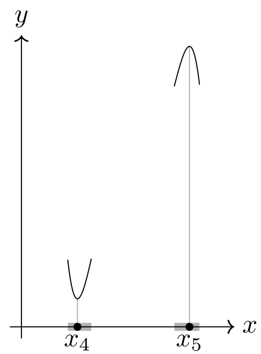
För att en invers ska finnas måste det råda ett 1:1 förhållande mellan punkter i definitionsmängden och värdemängden. Till varje y-värde i värdemängden ska det finnas exakt ett x-värde i definitionsmängden. Med andra ord krävs det att funktionen är en-entydig. För vår funktion råder inget sådant 1:1 förhållande, varför f inte har en invers.

2. Låt oss krympa f:s definitionsmängd till en liten omgivning av $x = x_2$.



I denna omgivning råder ett 1:1 förhållande mellan punkter i definitionsmängden och värdemängden. Vi säger att f är lokalt en-entydig i punkten $x = x_2$ och att den där har en lokal invers.

Det är inte i alla punkter vi kan få funktionen lokalt en-entydig. Betrakta t.ex. punkten $x = x_4$.

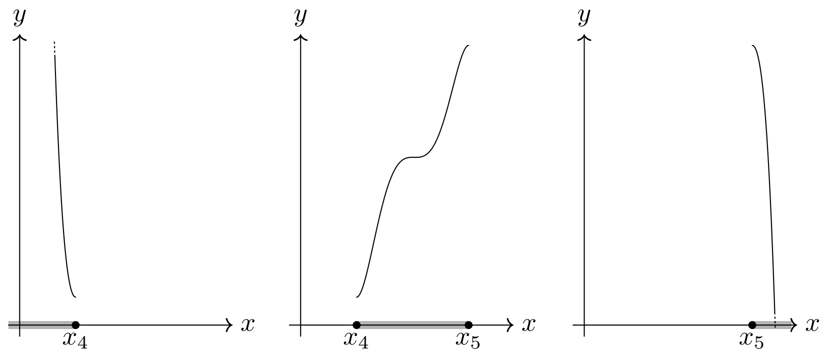


Hur liten vi än väljer omgivningen till $x = x_4$ kommer det alltid att finnas två punkter på varsin sida om x_4 med samma funktionsvärde. I punkten $x = x_4$ är alltså f inte lokalt en-entydig och har ingen lokal invers där. Den andra undantagspunkten är $x = x_5$, där det råder motsvarande situation.

Funktionen f har en lokal invers i alla punkter utom i $x = x_4$ och $x = x_5$.

3. Eftersom f är lokalt en-entydig i hela intervallet (x_4, x_5) följer det att f är en-entydig i samma intervall. Med detta menar vi att om vi inskränker f:s definitionsmängd till (x_4, x_5) så får vi en en-entydig funktion; den funktionen brukar man beteckna med $f|_{(x_4,x_5)}$.

   På samma sätt kan vi visa att f är en-entydig i intervallen $(-\infty, x_4)$ och (x_5, ∞).

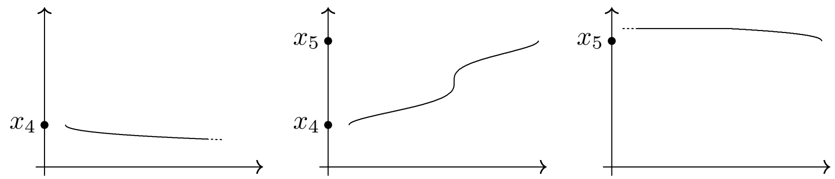


$f|_{(-\infty,x_4)}$ $\quad$ $f|_{(x_4,x_5)}$ $\quad$ $f|_{(x_5,\infty)}$

4. Till funktionerna

$$f|_{(-\infty,x_4)}, \quad f|_{(x_4,x_5)} \quad \text{och} \quad f|_{(x_5,\infty)}$$

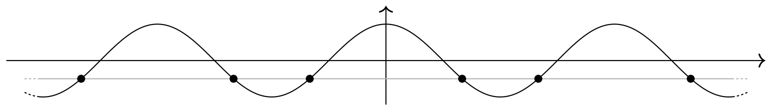
   kan vi definiera inverser. Var och en av dessa inverser kallas för en gren av f^{-1}.



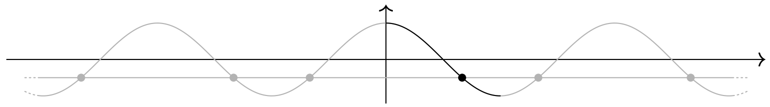
Inversen till $f|_{(-\infty,x_4)}$ $\quad$ Inversen till $f|_{(x_4,x_5)}$ $\quad$ Inversen till $f|_{(x_5,\infty)}$

3.5.2 Bestäm $\arccos(-\frac{1}{2})$.

Vi ska finna ett tal vars cosinus-värde är $-\frac{1}{2}$.



Eftersom funktionen arccos har värdemängden $[0, \pi]$ så ska det sökta talet ligga i detta intervall.



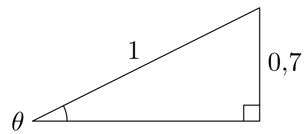
Inlärda cosinus-värden ger oss att $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$.

3.5.6 Bestäm $\cos(\arcsin 0{,}7)$.

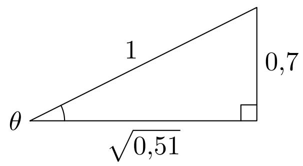
Vi ska lösa uppgiften på två olika sätt. Vilken metod som är ”bäst” beror på situationen.

Metod 1

Sätt $\theta = \arcsin 0{,}7$. Eftersom värdemängden till arcsin är $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ligger θ i detta intervall, och vi kan illustrera vinkeln θ med den rätvinkliga triangeln nedan.



Med Pythagoras sats får vi att den bredvidliggande kateten är $\sqrt{0{,}51}$.



Från triangeln är det nu enkelt att räkna ut $\cos\theta$,

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{0{,}51}}{1} = \sqrt{0{,}51}.$$

METOD 2

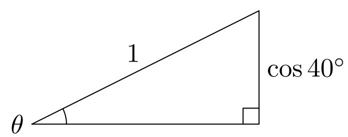
Vi använder den trigonometriska ettan

$$\begin{aligned}\cos(\arcsin 0{,}7) &= |\cos(\arcsin 0{,}7)| = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin 0{,}7)} = \{0{,}7 \in V_{\sin}\} \\ &= \sqrt{1-0{,}7^2} = \sqrt{0{,}51}.\end{aligned}$$

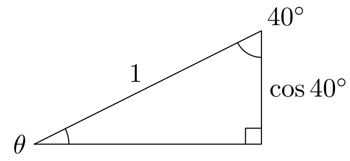
3.5.8 Bestäm $\arcsin(\cos 40^\circ)$.

METOD 1

Vi söker den vinkel som vi betecknat med θ i triangeln nedan.



Med definitionen av cosinus ser vi att komplementvinkeln till θ är 40°.



Eftersom triangelns vinkelsumma är 180° får vi att $\theta = 50^\circ$.

METOD 2

Vi använder att summan av arcsin och arccos är 90°,

$$\begin{aligned}\arcsin(\cos 40^\circ) &= 90^\circ - \arccos(\cos 40^\circ) = \{40^\circ \in [0^\circ, 180^\circ]\} \\ &= 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.\end{aligned}$$

3.5.14 Förenkla $\cos(\arcsin x)$.

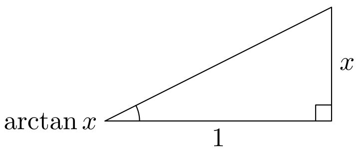
Vi använder den trigonometriska ettan.
För $x \geq 0$ är

$$\cos(\arcsin x) = |\cos(\arcsin x)| = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \{x \in [0,1]\} = \sqrt{1-x^2}.$$

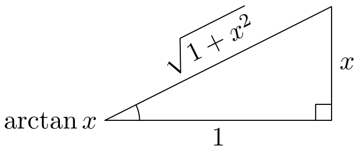
Eftersom arcsin är en udda funktion och cos är en jämn funktion är $\cos(\arcsin x)$ jämn. Högerledet ovan är också en jämn funktion, så formeln ovan gäller även för $x < 0$.

3.5.16 Förenkla $\sin(\arctan x)$.

Låt oss första anta att $x > 0$. Vi ritar upp en hjälptriangel.



Med Pythagoras sats får vi att hypotenusan är $\sqrt{1+x^2}$.



Definitionen av sinus ger att

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Om $x < 0$ så är

$$\sin(\arctan x) = -\sin\bigl(\arctan(-x)\bigr) = -\frac{-x}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3.5.20 Derivera $y = \arctan(ax+b)$.

Kedjeregeln ger att

$$y' = \frac{1}{(ax+b)^2+1} \cdot a.$$

3.5.22 Derivera $f(x) = x \arcsin x$.

Produktregeln ger att

$$f'(x) = (x)' \cdot \arcsin x + x \cdot (\arcsin x)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3.5.34 Finn ekvationer för de två linjer som är tangenter till $y = \arcsin x$ och har lutning 2.

En linje med lutning 2 har en ekvation i formen

$$y = 2x + m.$$

En sådan linje kan endast tangera grafen till $y = \arcsin x$ i punkter där derivatan är 2,

$$y'(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Linjerna ska alltså gå genom punkterna

$$\bigl(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \arcsin\tfrac{\sqrt{3}}{2}\bigr) = \bigl(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\pi}{3}\bigr) \quad \text{respektive} \quad \bigl(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \arcsin -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\bigr) = \bigl(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{\pi}{3}\bigr).$$

Vi får två fall

1. m anpassas så att linjen går genom $\bigl(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\pi}{3}\bigr)$,

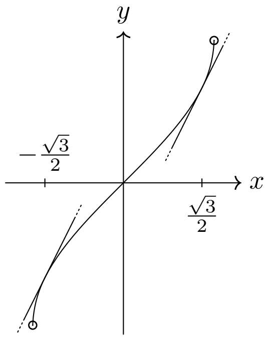
$$\tfrac{\pi}{3} = 2 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = \tfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

2. m anpassas så att linjen går genom $\bigl(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{\pi}{3}\bigr)$,

$$-\tfrac{\pi}{3} = 2 \cdot (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}) + mm = -\tfrac{\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

De två linjernas ekvationer är alltså

$$y = 2x + \tfrac{\pi}{3} - \sqrt{3},$$
$$y = 2x - \tfrac{\pi}{3} + \sqrt{3}.$$



Förenkla $\arcsin \frac{3}{5} + \arctan \frac{1}{7}$ så långt som möjligt.

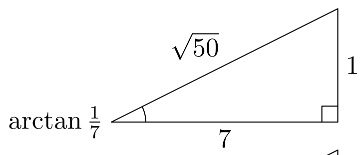
Sätt

$$x = \arcsin \tfrac{3}{5} + \arctan \tfrac{1}{7}. \qquad (*)$$

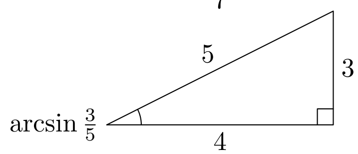
Tag sinus av båda led och använd additionsformeln för sinus,

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin\bigl(\arcsin \tfrac{3}{5} + \arctan \tfrac{1}{7}\bigr)\\ &= \sin \arcsin \tfrac{3}{5} \cdot \cos \arctan \tfrac{1}{7} + \cos \arcsin \tfrac{3}{5} \cdot \sin \arctan \tfrac{1}{7}.\end{aligned}$$

För att beräkna dessa uttryck ritar vi upp hjälptrianglar.



$$\cos \arctan \tfrac{1}{7} = \tfrac{7}{\sqrt{50}}$$
$$\sin \arctan \tfrac{1}{7} = \tfrac{1}{\sqrt{50}}$$



$$\cos \arcsin \tfrac{3}{5} = \tfrac{4}{5}$$

Alltså är

$$\sin x = \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{7}{\sqrt{50}} + \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{50}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Denna ekvation har lösningarna

$$x = \tfrac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{och} \quad x = \tfrac{3\pi}{4} + 2n\pi \qquad \text{för alla heltal } n. \qquad (\dagger)$$

Om vi åter tittar på $(*)$ är det uppenbart att det finns exakt en lösning och inte oändligt många som i $(\dagger)$. Eftersom vi tog sinus av båda led i $(*)$ och sinusfunktionen inte är en-entydig var det i detta steg vi introducerade alla falska rötter. Vi måste bestämma vilket av alla tal i $(\dagger)$ som är den riktiga roten.

Om vi betraktar värdemängden för arcsin och arctan är de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ respektive $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Summan $x = \arcsin \frac{3}{5} + \arctan \frac{1}{7}$ måste alltså ligga i intervallet $(-\pi, \pi)$. Detta utesluter alla punkter i $(\dagger)$ utom

$$x = \tfrac{\pi}{4} \quad \text{och} \quad x = \tfrac{3\pi}{4}.$$

En av dessa två punkter är fortfarande en falsk rot. Om vi är lite noggrannare ser vi att

$$0 < \tfrac{3}{5} < 1 \quad \text{och} \quad 0 < \tfrac{1}{7} < \tfrac{1}{2}.$$

Eftersom både arcsin och arctan är strängt växande är

$$0 < \arcsin \tfrac{3}{5} < \arcsin 1 = \tfrac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad 0 < \arctan \tfrac{1}{7} < \arctan \tfrac{1}{2} = \tfrac{\pi}{4}.$$

Detta betyder att

$$0 < x < \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{3\pi}{4}.$$

Detta visar att $x = \frac{3\pi}{4}$ är en falsk rot. Svaret är alltså $x = \frac{\pi}{4}$.

KTH 27 aug 87 Visa att

$$\arctan \sqrt{x^2-1} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-1}{2x}}$$

för alla $x \geq 1$.

Sätt

$$f(x) = \arctan \sqrt{x^2-1} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-1}{2x}}.$$

Vi ska visa att $f(x) = 0$ för $x \geq 1$.

Vi ser att funktionen f är kontinuerlig och deriverbar för $x > 1$. Dess derivata är

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2-1)} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2x}\right)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{2x}}} \cdot \frac{1 \cdot 2x - (x-1) \cdot 2}{4x^2}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{2x}} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{2x}} \cdot 2x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = 0.$$

Alltså är $f'(x) = 0$ för $x \geq 1$ och detta ger att f är konstant för $x \geq 1$. Eftersom $f(1) = \arctan 0 - 2 \arcsin 0 = 0$ har vi visat att

$$f(x) = 0 \qquad \text{för alla } x \geq 1.$$

Anm. Om en funktion f har derivatan $f' = 0$ i ett intervall $[a, b]$ då kan vi använda medelvärdessatsen på f i delintervallet (a, x) och få att

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = f(a).$$

där $a < \xi < x$ varför vi kan vara säkra på att $f'(\xi) = 0$.