Lektion 7, Envariabelanalys den 28 oktober 1999

Visa att funktionerna $y_1 = e^{r_1 t}$ och $y_2 = e^{r_2 t}$, där $r_1 \neq r_2$, är linjärt oberoende.

Vi ska visa implikationen

$$ay_1 + by_2 \equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = b = 0.$$

Alltså ska vi undersöka vilka lösningar a och b som ekvationen

$$ay_1 + by_2 \equiv 0 \tag{$*$}$$

kan ha. Om y_1 och y_2 uppfyller identiteten $(*)$ så uppfyller de även identiteten vi får om vi deriverar $(*)$,

$$ay_1' + by_2' \equiv 0.$$

Vi har alltså att

$$ay_1 + by_2 \equiv 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} ay_1 + by_2 & \equiv 0 \\ ay_1' + by_2' & \equiv 0 \end{cases}$$

Ekvationssystemet har bara den trivial lösningen $a = b = 0$ om determinanten av systemmatrisen är skild från 0,

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = r_2 e^{(r_1+r_2)t} - r_1 e^{(r_1+r_2)t}$$
$$= (r_2 - r_1) e^{(r_1+r_2)t} \not\equiv 0.$$

Alltså har $(*)$ endast den triviala lösningen, d.v.s. vi har visat implikationen

$$ay_1 + by_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = b = 0.$$

17.7.2 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 - 2r - 3 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r-1)^2 - 1 - 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = 3 \quad \text{och} \quad r = -1.$$

Alltså är $\{e^{3t}, e^{-t}\}$ en bas för lösningsrummet, och den allmänna lösningen kan därmed skrivas

$$y(t) = A\,e^{3t} + B\,e^{-t},$$

där A och B är konstanter.

17.7.6 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r-1)^2 - 1 + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = 1 \quad \text{(dubbelrot)}.$$

Den allmänna lösningen är

$$y(t) = (A + Bt)e^t.$$

17.7.10 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 - 4r + 5 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r-2)^2 - 4 + 5 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = 2 \pm i.$$

Den allmänna lösningen är

$$y(t) = Ae^{2t}\cos t + Be^{2t}\sin t.$$

17.7.14 Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 2. \end{cases}$$

Vi söker en lösning till differentialekvationen som dessutom uppfyller de extra villkoren i uppgiftstexten. Vi tar först fram den allmänna lösningen.

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 10r + 25 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r+5)^2 - 25 + 25 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = -5 \quad \text{(dubbelrot)}.$$

Den allmänna lösningen är

$$y(t) = (At + B)e^{-5t}.$$

Vi ska nu anpassa A och B så att begynnelsevärdena är uppfyllda

$$0 = y(1) = (A+B)e^{-5},$$

$$2 = y'(1) = \frac{d}{dt}\big((At+B)e^{-5t}\big)\Big|_{t=1} = (-4A - 5B)e^{-5}.$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ 4A + 5B &= -2e^5 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A &= 2e^5 \\ B &= -2e^5. \end{cases}$$

Alltså är lösningen

$$y(t) = 2e^5(t-1)e^{-5t}.$$

17.8.2 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' + y' - 2y = x.$$

Den allmänna lösningen är summan av en partikulärlösning och lösningar till den homogena ekvationen.

Homogen lösningar

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + r - 2 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r + 1/2)^2 - 1/4 - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = 1 \quad \text{eller} \quad r = -2.$$

Alltså är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$y_H(x) = Ae^x + Be^{-2x}.$$

Partikulärlösning

Eftersom högerledet är ett förstagradspolynom ansätter vi ett allmänt förstagradspolynom som partikulärlösning $y_P(x) = Cx + D$.

Vänsterledet i differentialekvationen blir

$$y_P'' + y_P' - 2y_P = 0 + C - 2(Cx + D) = (-2C)x + (C - 2D).$$

Identifikation av koefficienter med högerledet i differentialekvationen ger

$$\begin{cases} -2C &= 1 \\ C - 2D &= 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} C &= -1/2, \\ D &= -1/4. \end{cases}$$

En partikulärlösning är alltså

$$y_P(x) = -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}.$$

Allmän lösning

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ae^x + Be^{-2x} - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}.$$

17.8.8 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}.$$

Homogen lösningar

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 4r + 4 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r+2)^2 - 4 + 4 = 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad r = -2 \quad \text{(dubbelrot)}.$$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är

$$y_H(x) = (Ax + B)e^{-2x}.$$

Partikulärlösning

Eftersom högerledet till differentialekvationen är en lösning till den homogena ekvationen måste vi göra en ansats av typen

$$y_P(x) = Cx^m e^{-2x},$$

där m väljs så att $x^m e^{-2x}$ inte är en lösning till den homogena ekvationen. I detta fall måste vi välja $m = 2$. Vi ansätter alltså

$$y_P(x) = Cx^2 e^{-2x}.$$

Vi får

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= 2Cxe^{-2x} + 2Cx^2e^{-2x}(-2) = 2Ce^{-2x}(x - x^2), \\ y_P''(x) &= -4Ce^{-2x}(x - x^2) + 2Ce^{-2x}(1 - 2x) = 2Ce^{-2x}(1 - 4x + 2x^2). \end{aligned}$$

Vänsterledet av differentialekvationen blir

$$y_P'' + 4y_P' + 4y_P = 2Ce^{-2x}(1 - 4x + 2x^2 + 4x - 4x^2 + 2x^2) = 2Ce^{-2x}.$$

Identifikation med högerledet i differentialekvationen ger att $C = 1/2$. Alltså är partikulärlösningen

$$y_P(x) = \tfrac{1}{2}x^2e^{-2x}.$$

Allmän lösning

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = (A + Bx + \tfrac{1}{2}x^2)e^{-2x}.$$

17.8.10 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x.$$

Homogen lösningar

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 2r + 2 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r+1)^2 - 1 + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = -1 \pm i.$$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är

$$y_H(x) = Ae^{-x} \cos x + Be^{-x} \sin x.$$

Partikulärlösning

Vi ska ansätta en partikulärlösning av typen

$$y_P(x) = x^m e^{-x}(C \cos x + D \sin x),$$

där heltalet m ska väljas så att ingen av termerna är en lösning till den homogena ekvationen. I detta fall kan vi inte välja $m = 0$ utan måste välja $m = 1$. Vi ansätter alltså

$$y_P(x) = xe^{-x}(C \cos x + D \sin x).$$

Vi får att

$$\begin{aligned} y'_P(x) &= e^{-x} \cos x\big(C + (-C + D)x\big) + e^{-x} \sin x\big(D - (C + D)x\big), \\ y''_P(x) &= e^{-x} \cos x\big(-2Dx - 2C + 2D\big) + e^{-x} \sin x\big(2Cx - 2C - 2D\big). \end{aligned}$$

Vänsterledet i differentialekvationen blir

$$y''_P + 2y'_P + 2y_P = e^{-x}(2D \cos x - 2C \sin x).$$

Identifikation med högerledet ger att $C = -1/2$ och $D = 0$. Alltså är partikulärlösningen

$$y_P(x) = -\tfrac{1}{2} xe^{-x} \cos x.$$

Allmän lösning

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = (A - \tfrac{1}{2}x)e^{-x} \cos x + Be^{-x} \sin x.$$

17.8.12 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}.$$

Homogen lösningar

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 2r + 1 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r+1)^2 - 1 + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = -1 \quad \text{(dubbelrot)}.$$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är

$$y_H(x) = (A + Bx)e^{-x}.$$

Partikulärlösning

Vi ska göra en ansats av typen

$$y_P(x) = x^m e^{-x}(Cx + D),$$

där heltalet m ska väljas så att ingen av termerna är en lösning till den homogena ekvationen. I detta fall måste vi välja $m = 2$. Vi ansätter alltså

$$y_P(x) = e^{-x}(Cx^3 + Dx^2).$$

Vi får att

$$\begin{aligned} y'_P(x) &= e^{-x}\big(Cx^3 + (-3C + D)x^2 - 2Dx\big), \\ y''_P(x) &= e^{-x}\big(Cx^3 + (6C + D)x^2 + (6C - 4D)x + 2D\big). \end{aligned}$$

Vänsterledet i differentialekvationen blir

$$y_P'' + 2y_P' + y_P = e^{-x}(6Cx + 2D).$$

Identifikation med högerledet ger att $C = 1/6$ och $D = 0$. Alltså är partikulärlösningen

$$y_P(x) = \tfrac{1}{6}x^3 e^{-x}.$$

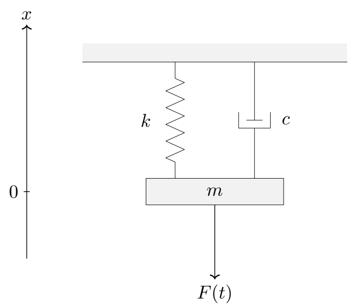
Allmän lösning

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = (A + Bx + \tfrac{1}{6}x^3)e^{-x}.$$

En massa m hänger i en fjäder och i en dämpare, med konstanter k respektive c. Ställ upp massans rörelseekvation och bestäm massans rörelse då den utsätts för en yttre periodisk kraft

$$F(t) = F_0 \cos(\omega_1 t).$$



Newtons kraftlag ger oss rörelseekvationen

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -F(t),$$

där x är massans läge på den vertikala koordinataxeln (med lämpligt val av nolläge). Vi delar med m och inför nya omskalade koefficienter

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t).$$

Vi löser nu denna differentialekvation.

Homogen lösning

Om vi antar att dämpningen är liten ($\delta < \omega_0$) så är den homogena lösningen

$$x_H(t) = e^{-\delta t}\big(A\cos\omega t + B\sin\omega t\big),$$

där $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ kallas för egenvinkelfrekvensen.

Eftersom $\delta > 0$ kommer den homogen lösningen ganska snabbt att avklinga och dö ut. Den homogena lösningen beskriver alltså en transient, övergående rörelse.

Partikulärlösning

Eftersom högerledet är $f(t) = f_0\cos(\omega_1 t)$ ansätter vi

$$x_P(t) = C\cos\omega_1 t + D\sin\omega_1 t.$$

Efter en del räknande får vi att

$$x_P(t) = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\delta\omega_1)^2}\Big((\omega_0^2 - \omega_1^2)\cos\omega_1 t + 2\delta\omega_1 \sin\omega_1 t\Big)$$

Detta uttryck kan vi med hjälp av formeln

$$a\,\cos x + b\,\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\,\cos(x + \gamma)$$

skriva om till

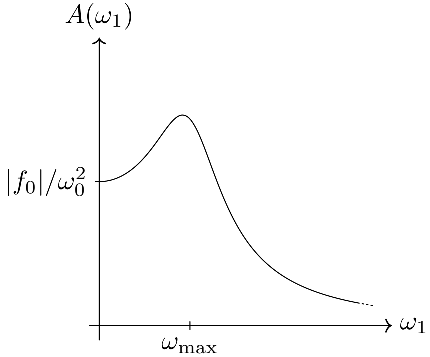
$$x_P(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\delta\omega_1)^2}}\cos(\omega_1 t + \gamma)$$

där γ är en fasförskjutning.

Beroende på vilken vinkelhastighet ω_1 som den yttre kraften har, varierar massklumpens amplitud,

$$A(\omega_1) = \frac{|f_0|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\delta\omega_1)^2}}.$$

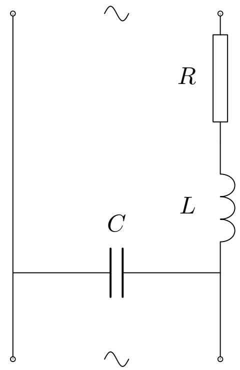
Ritar vi upp ett diagram av amplitudens beroende av ω_1 fås typiskt diagrammet



Amplituden antar ett maximalt värde vid den s.k. resonansfrekvensen $\omega_{\text{max}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$.

Ett enkelt exempel på ett bandpassfilter är serieresonanskretsen till höger. En inspänning u_{in} matas uppifrån och nertill får vi en utspänning u.

Bestäm hur utspänningens amplitud beror på frekvensen av en inspänning som är en sinusformad växelspänning.



Vi inför en ström i som genomlöper kretsen och

$$\begin{aligned} u_1 &= \text{spänningen över resitorn } R,\\ u_2 &= \text{spänningen över spolen } L. \end{aligned}$$

Resistorn, spolen och kondensatorn uppfyller sambanden

$$u_1 = R\cdot i, \quad u_2 = L\,\frac{di}{dt} \quad \text{och} \quad i = C\,\frac{du}{dt}.$$

Ur dessa ekvationer får vi att

$$u_2 = L\,\frac{di}{dt} = LC\,\frac{d^2u}{dt^2} \quad \text{och} \quad u_1 = R\,i = RC\,\frac{du}{dt}.$$

Kirchoffs spänningslag ger att

$$u_{\text{in}} = \hat{u}\cos\omega t = u_1 + u_2 + u,$$

vilket betyder att u uppfyller differentialekvationen

$$LC\,\ddot{u} + RC\,\dot{u} + u = \hat{u}\cos\omega t.$$

Vi vet från mekanikexemplet att den homogena lösningen representerar en transient spänning som kommer snabbt att avklinga. För att bestämma partikulärlösningen ansätter vi

$$u_{\scriptscriptstyle P}(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

Efter en hel del räkningar får vi att

$$\begin{aligned} u_{\scriptscriptstyle P}(t) &= \frac{\hat{u}}{LC\Bigl(\Bigl(\dfrac{1}{LC}-\omega^2\Bigr)^2 + \Bigl(\dfrac{R}{L}\Bigr)^2\Bigr)}\Bigl(\Bigl(\frac{1}{LC}-\omega^2\Bigr)\cos\omega t + \frac{R}{L}\sin\omega t\Bigr)\\ &= \frac{\hat{u}}{LC\sqrt{\Bigl(\dfrac{1}{LC}-\omega^2\Bigr)^2 + \Bigl(\dfrac{R}{L}\Bigr)^2}}\cos(\omega t + \gamma). \end{aligned}$$

Utspänningens amplitud är alltså

$$A(\omega) = \frac{|\hat{u}|}{LC\sqrt{\Bigl(\dfrac{1}{LC}-\omega^2\Bigr)^2 + \Bigl(\dfrac{R}{L}\Bigr)^2}}.$$

Om vi plottar amplitudens beroende av ω får vi diagrammet till höger.

Notera att det huvudsakligen är frekvenser kring ω_0 som förstärks medan andra frekvenser dämpas. Detta är förklaringen till namnet bandpassfilter.