Tommy Ekola
Institutionen för matematik
KTH
100 44 Stockholm

rum	3734, plan 7
telefon	08–790 66 59
epost	`ekola@math.kth.se`
mottagningstid	måndagar kl. 14–17

Allt utdelat, datorskrivet, material finns på hemsidan

`http://www.math.kth.se/~ekola/envarre.html`

Om du är först med att rapportera om något fel i utdelat material får du  som hittelön.

Kvantorer

$\forall$	för alla
$\exists$	existerar
$:$	sådan att
$\Rightarrow$	medför (implicerar)
$\Leftrightarrow$	om och endast om (ekvivalent)
$\in$	tillhör

Gränsvärdesdefinitionen

Egentliga gränsvärden

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ om

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ om

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : x > N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Oegentliga gränsvärden

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ om

$$\forall\, M > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ om

$$\forall\, M > 0 \;\; \exists\, N : x > N \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

Höger- och vänstergränsvärden

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$ om

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : a < x < a+\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-b| < \varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$ om

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : a-\delta < x < a \quad \Rightarrow \quad |f(x)-b| < \varepsilon.$$

Räkneregler

Om $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ och $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existerar (ändliga) då är

1. $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x).$
2. $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x).$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\big)\cdot\big(\lim\limits_{x\to a} g(x)\big).$
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad$ om $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0.$

Räkneregler för oegentliga gränsvärden

Obestämt uttryck	Ett obestämt uttryck är i formen $$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ \infty^0 \text{ eller } 1^\infty.$$

Räknereglerna för gränsvärden gäller även för oegentliga gränsvärden förutsatt att de inte leder till obestämda uttryck.

Anm. Uttrycket $\frac{1}{0}$ är odefinierat, medan $\frac{1}{0^+} = +\infty$ och $\frac{1}{0^-} = -\infty$.

Instängningsprincipen

Om $f(x) \le g(x) \le h(x)$ och $f(x), h(x) \to b$ då $x \to a$, då är

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x).$$

Anm. både a och b kan vara $\pm\infty$.