Absolutkonvergens

En serie $\sum a_n$ sägs vara absolutkonvergent om serien $\sum |a_n|$ konvergerar.

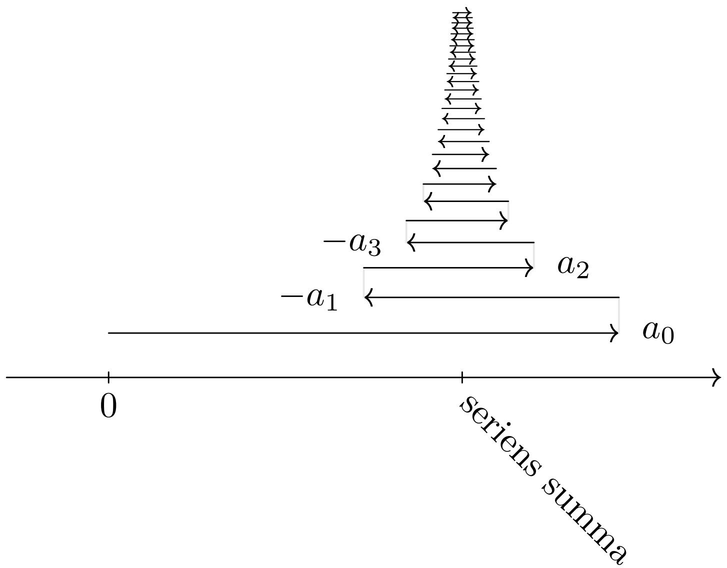
Sats $\sum a_n$ absolutkonvergent $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergent

Betingad konvergens

Om serien $\sum a_n$ är konvergent men inte absolutkonvergent, då sägs serien vara betingat konvergent.

Sats (Leibniz test)
Om $\{a_n\}$ är en positiv avtagande talföljd som konvergerar mot 0, då är serien $\sum(-1)^n a_n$ konvergent.

Bevis (Utan ord)



Potensserier

En serie med formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \qquad (*)$$

kallas för en potensserie i x med mittpunkt i $x = c$.
Talen $\{a_n\}$ kallas för potensseriens koefficienter.

De punkter x där potensserien $(*)$ konvergerar kallas för konvergensområdet.

Sats En potensseries konvergensområde har ett av följande utseenden

1. en punkt $x = c$,
2. ett intervall mellan $c - R$ och $c + R$,
3. alla reella tal.

Talet R kallas för konvergensradien till serien.
(Om fall 1 inträffar svarar det mot $R = 0$.
Om fall 3 inträffar svarar det mot $R = \infty$.)

d'Alemberts kvotformel

Konvergensradien ges av formeln

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

om gränsvärdet existerar.

Räkneregler

Om $\sum a_n x^n$ och $\sum b_n x^n$ är två potensserier med konvergensradier R_a respektive R_b, då gäller att

- $\sum (ca_n)x^n = c \sum a_n x^n, \qquad \text{för } |x| < R_a,$
- $\sum (a_n + b_n)x^n = \sum a_n x^n + \sum b_n x^n,$

  $\text{för } |x| < \min\{R_a, R_b\}.$

Abels kontinuitetssats

Om $R > 0$, då gäller följande,

- $\displaystyle \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\lim_{x \to R^-} a_n x^n \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n,$
- $\displaystyle \lim_{x \to -R^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\lim_{x \to -R^+} a_n x^n \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$

om respektive serie i högerledet konvergerar.

Derivering och integration av potensserier

Om potensserien $\sum a_n x^n$ har konvergensradien R, då gäller att

- $\displaystyle \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\big(a_n x^n\big) \qquad \text{för } |x| < R,$
- $\displaystyle \int_0^a \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_0^a a_n x^n \, dx \Big) \qquad \text{för } |a| < R.$