

## Kontinuitet

Kontinuitet i en punkt      Funktionen  $f$  sägs vara kontinuerlig i  $x = a$  om

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Kontinuitet i ett öppet intervall      Funktionen  $f$  är kontinuerlig i ett öppet intervall  $(a, b)$  om  $f$  är kontinuerlig i varje punkt i  $(a, b)$ .

## Höger- och vänsterkontinuitet

Funktionen  $f$  är högerkontinuerlig i  $x = a$  om

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Funktionen  $f$  är vänsterkontinuerlig i  $x = a$  om

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

Kontinuitet i ett slutet intervall      Funktionen  $f$  är kontinuerlig i det slutna intervallet  $[a, b]$  om den är kontinuerlig i  $(a, b)$ , och höger- och vänsterkontinuerlig i  $x = b$  respektive  $x = a$ .

## Kontinuerliga elementära funktioner

**Sats**      Följande funktioner är alla kontinuerliga:

1. polynom,
2. rationella funktioner,
3. logaritmfunktionen,
4. exponentialfunktionen,
5. potensfunktioner,
6. de trigonometriska funktionerna,
7. de cyklometriska funktionerna, och
8. de hyperboliska funktionerna.

**Sats**      Om  $f$  och  $g$  är kontinuerliga i en punkt  $x = a$ , då är följande funktioner också kontinuerliga i denna punkt

1.  $f(x) + g(x)$ ,
2.  $f(x) - g(x)$ ,
3.  $f(x) \cdot g(x)$ ,
4.  $f(x)/g(x)$  om  $g(a) \neq 0$ ,
5.  $\sqrt[n]{f(x)}$  om  $f(a) > 0$  för  $n$  jämn.

**Sats**      Om  $g$  är kontinuerlig i  $x = a$  och  $f$  är kontinuerlig i  $g(a)$ , då är  $f \circ g$  kontinuerlig i  $x = a$ , d.v.s.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

### Satsen om extremvärden

Om en funktion  $f$  är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall  $[a, b]$ , så antar  $f$  såväl ett största som ett minsta värde i detta intervall.

### Satsen om mellanliggande värden

Om funktionen  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$  och  $y_0$  är ett tal mellan  $f(a)$  och  $f(b)$ , då finns åtminstone ett  $x = x_0$  s.a.  $f(x_0) = y_0$ .

### Derivata

Derivatans till en funktion  $f$  i en punkt  $x = a$  definieras som

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

om gränsvärdet existerar.

### Höger- och vänsterderivata

Högerderivata  $f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Vänsterderivata  $f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

### Tangent och normal

Tangentlinje Tangentlinjen till funktionen  $f$  i punkten  $x = a$  är en rät linje med lutning  $f'(a)$  och som går genom punkten  $(a, f(a))$ .

Normallinje Normallinjen till funktionen  $f$  i punkten  $x = a$  är en rät linje med lutning  $-1/f'(a)$  (vinkelrät mot tangentlinjen) och som går genom punkten  $(a, f(a))$ .

### Tabell över elementära funktioners derivata

$f(x)$	$f'(x)$
$x^r$	$rx^{r-1}$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$a^x \log a$
$\log x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$