Lokala extremvärden

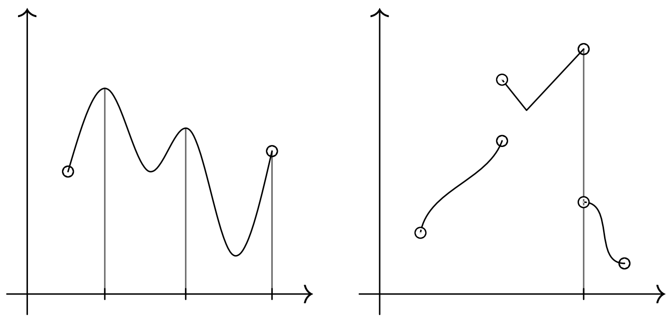
En funktion f har en lokal maximipunkt i $x = x_0$ om det finns en omgivning U till x_0 där

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \text{för alla } x \in U \text{ och } D_f.$$

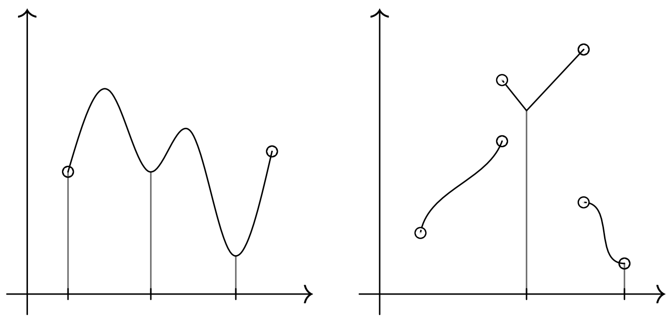
Om det finns en omgivning V till x_1 där

$$f(x_1) \leq f(x) \qquad \text{för alla } x \in V \text{ och } D_f.$$

så har f en lokal minimipunkt i x_1.



Lokala maximipunkter



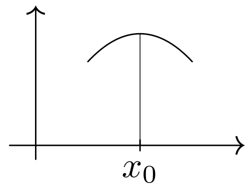
Lokala minimipunkter

Satser om lokala extremvärden

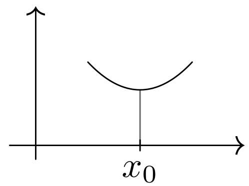
Sats De lokala extrempunkterna till en funktion f, som är definierad i ett intervall, återfinns bland följande punkter,

1. kritiska punkter (d.v.s. punkter där derivatan är noll),
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

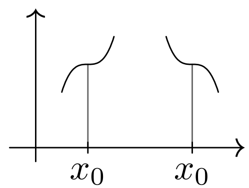
Sats Om funktionen f är deriverbar och $f' > 0$ i en vänsteromgivning av $x = x_0$ och $f' < 0$ i en högeromgivning, då har f ett lokalt maximum i $x = x_0$.



Sats Om funktionen f är deriverbar och $f' < 0$ i en vänsteromgivning av $x = x_0$ och $f' > 0$ i en högeromgivning, då har f ett lokalt minimum i $x = x_0$.



Sats Om funktionen f är deriverbar och $f'(x_0) = 0$ samt $f' > 0$ (eller < 0) i en vänster- och högeromgivning av $x = x_0$, då har f en terasspunkt i $x = x_0$.



Största och minsta värde

Om en funktion f är definierad i ett intervall I och $x_0 \in I$ samt

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \text{för alla } x \in I,$$

då sägs $f(x_0)$ vara funktionens största värde i intervallet I.

Om $x_1 \in I$ och

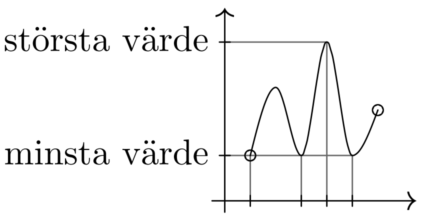
$$f(x_1) \leq f(x) \qquad \text{för alla } x \in I,$$

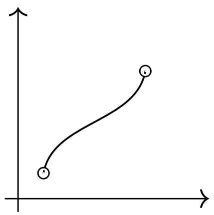
då sägs $f(x_1)$ vara funktionens minsta värde i intervallet I.

Sats Största och minsta värdet av en kontinuerlig funktion f, definierad i ett slutet och begränsat intervall, antas i lokala extrempunkter.

Sats Största och minsta värdet av en kontinuerlig funktion f, definierad i ett öppet intervall, antas antingen i lokala extrempunkter eller så gäller då $x \to$ ändpunkt att

- $\lim f(x) >$ lokala extremvärden $\Rightarrow$ f saknar största värde.
- $\lim f(x) <$ lokala extremvärden $\Rightarrow$ f saknar minsta värde.



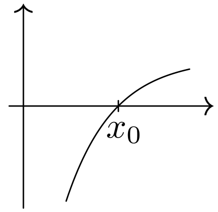


Andra-derivata-testet

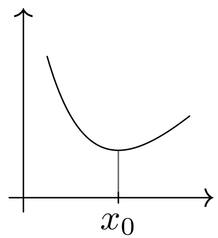
Låt f vara en två gånger deriverbar funktion.
Om $f'(x_0) = 0$ och

- $f''(x_0) > 0$, då är x_0 en lokal minimipunkt,
- $f''(x_0) < 0$, då är x_0 en lokal maximipunkt.

Bevis Att $f''(x_0) > 0$ betyder att f' är strängt växande kring $x = x_0$. Alltså har f':s graf utseendet



Den stränga monotoniciteten ger att f' är negativ till vänster om x_0 och positiv till höger om x_0. Enligt tidigare sats får vi att f har ett lokalt minimum i $x = x_0$.



I fallet $f''(x_0) < 0$ resonerar man på ett liknande sätt.