1. Den sista raden är nästan lika med den första raden med omvänt tecken. Om vi därför adderar den första raden till den sista raden får vi en rad med många nollor som vi kan utveckla längs,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 & 2 \\ -4 & 8 & -5 & 5 \\ 4 & 4 & 8 & 6 \\ -3 & 0 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 & 2 \\ -4 & 8 & -5 & 5 \\ 4 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -4 & -5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

I denna 3×3-determinant är den andra kolonnen nästa lika med två gånger den första kolonnen. Med en kolonnoperation kan vi få en kolonn med många nollor som vi utvecklar längs

$$= (-1) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -4 & -5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -3 \cdot (3 \cdot 6 - 2 \cdot 4) = -30.$$

2. a) Jacobimatrisen är

$$J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2\sqrt{xy-1}\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2\sqrt{xy-1}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(y\, e^{x-2y}\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y\, e^{x-2y}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{\sqrt{xy-1}} & \dfrac{x}{\sqrt{xy-1}} \\ y\, e^{x-2y} & (1-2y)e^{x-2y} \end{pmatrix}.$$

b) Funktionen f har en lokal invers kring punkten $(x,y) = (2,1)$ om Jacobimatrisen J_f är inverterbar i punkten, d.v.s. om dess determinant är skild från noll. Vi har att

$$\det J_f = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -3 \neq 0.$$

c) Den lokala inversens Jacobimatris är lika med inversen av f:s Jacobimatris i motsvarande punkt,

$$J_{f^{-1}} = \left(J_f\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3. a) Vektorerna bildar en ON-bas om de har längd 1 och är parvis vinkelräta. Villkoret att $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_3$ är vinkelräta ger att

$$0 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = -\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} + a \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) - \tfrac{1}{3} \cdot (-a) = -\tfrac{4}{9} - \tfrac{2}{3}a \quad \Leftrightarrow \quad a = -\tfrac{2}{3}.$$

Eftersom $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ ska vara vinkelräta måste gälla att

$$0 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = -\tfrac{2}{3} \cdot b - \tfrac{2}{3} \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right) + \tfrac{1}{3} \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{2}{9} - \tfrac{2}{3}b \quad \Leftrightarrow \quad b = \tfrac{1}{3}.$$

Med dessa värden på a och b kontrollerar vi sedan att de övriga villkoren är uppfyllda,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 &= \left(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right) \cdot \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3} \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) - \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{9} - \tfrac{4}{9} = 0, \\
|\boldsymbol{u}_1|^2 &= \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \left(-\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{9} = 1, \\
|\boldsymbol{u}_2|^2 &= \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{2}{3}\right)^2 = \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{9} = 1, \\
|\boldsymbol{u}_3|^2 &= \boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 = \tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9} = 1.
\end{aligned}$$

b) Den sökta transformationsmatrisen C ges som inversen av matrisen med $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$ som kolonner,

$$C = \begin{pmatrix} -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} \\ -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{3} \\ \tfrac{1}{3} & -\tfrac{2}{3} & \tfrac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Eftersom $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$ är en ON-bas är matrisen som ska inverteras en ON-matris och därför är inversen lika med transponatet,

$$C = \begin{pmatrix} -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} \\ -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{3} \\ \tfrac{1}{3} & -\tfrac{2}{3} & \tfrac{2}{3} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} \\ \tfrac{1}{3} & -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{2}{3} \\ \tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

4. De kritiska punkterna fås genom att sätta f:s partialderivator lika med noll,

$$f'_x = 2x - 1 + \frac{y^2}{1+x^2} = 0, \tag{1}$$

$$f'_y = 2y \arctan x = 0. \tag{2}$$

Från (2) får vi två fall.

$x = 0$: Ekvation (1) ger oss då att $y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 1$.

$y = 0$: Ekvation (1) ger att $2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}$.

Totalt finns alltså tre kritiska punkter $(0, -1)$, $(0, 1)$ och $(\tfrac{1}{2}, 0)$.

De kritiska punkternas karaktär kan vi bestämma med andraderivatorna. Hessianen är lika med

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \dfrac{2xy^2}{(1+x^2)^2} & \dfrac{2y}{1+x^2} \\ \dfrac{2y}{1+x^2} & 2\arctan x \end{pmatrix}$$

och från dess egenvärden i de kritiska punkterna kan vi klassificera punkterna.

- Punkten $(x, y) = (0, -1)$. Hessianens värde är

  $$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

  och dess egenvärden ges av den karakteristiska ekvationen

  $$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \pm \sqrt{5}.$$

  Hessianen har ett positivt och ett negativt egenvärde vilket betyder att punkten är en sadelpunkt.

- Nästa punkt $(x, y) = (0, 1)$. Hessianens värde är

  $$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

  och den karakteristiska ekvationen är

  $$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \pm \sqrt{5}.$$

  Både ett positivt och negativt egenvärde betyder att punkten är en sadelpunkt.

- Slutligen punkten $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$. Hessianen är

  $$H_f(\tfrac{1}{2},0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\arctan\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

  och har egenvärdena 2 och $2\arctan\frac{1}{2}$. Eftersom båda egenvärdena är postiva är punkten ett lokalt minimum.

5. Vi stoppar in punkterna $(-1, 8)$, $(0, -2)$, $(1, 1)$ och $(2, 3)$ i kurvans ekvation $y = a(x^2 - 1) + b(x - 1)$,

$$\begin{cases} a \cdot 0 & + b \cdot (-2) = 8 \\ a \cdot (-1) & + b \cdot (-1) = -2 \\ a \cdot 0 & + b \cdot 0 = 1 \\ a \cdot 3 & + b \cdot 1 = 3 \end{cases}$$

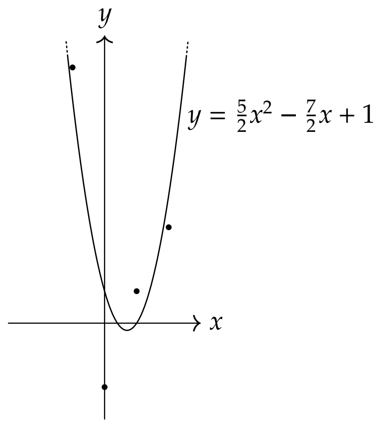
eller i matrisform

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Genom att vänstermultiplicera båda led med transponatet av vänsterledets koefficientmatris får vi systemets normalekvation

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \end{pmatrix}.$$



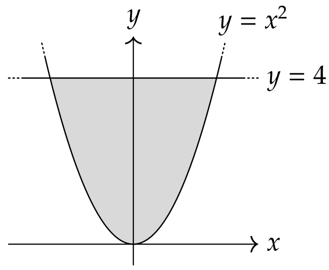
Lösningen till detta system ger oss minstakvadratlösningen. Cramers regel ger

$$a = \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ -11 & 6 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \tfrac{5}{2},$$

$$b = \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -\tfrac{7}{2}.$$

Den kurva som bäst anpassar punkterna i minstakvadratmening är $y = \frac{5}{2}(x^2-1) - \frac{7}{2}(x-1) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 1$.

6. Genom att rita upp de tillåtna punkterna ser vi att området är kompakt (slutet och begränsat). Detta tillsammans med att funktionen f är kontinuerlig ger att det finns ett största och minsta värde till f i området.
Funktionen antar detta största respektive minsta värde i någon av följande punkter



   1. inre kritiska punkter,
   2. punkter på randkurvorna, eller
   3. skärningspunkter mellan randkurvorna.

   Vi undersöker dessa tre fall.

   1. I en inre kritisk punkt måste gälla att $f'_x = f'_y = 0$, men eftersom $f'_x \equiv 2 \neq 0$ saknas sådana punkter.
   2. Vi har två randkurvor att undersöka.
      På linjen $y = 4$ är funktionen $f(x, 4) = 2x + 4$ strängt växande, vilket betyder att det inte finns lokala extrempunkter i det inre av linjen.
      På parabeln $y = x^2$ är funktionen lika med $f(x, x^2) = 2x + x^2$. Om vi kallar detta uttryck för $g(x)$ så måste $g'(x) = 2 + 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1$ i en lokal extrempunkt på parabeln. Detta svarar mot punkten $(x, y) = (-1, 1)$ (som verkligen tillhör området eftersom punkten ligger mellan skärningspunkterna i x-led; se punkt 3).
   3. Skärningspunkterna måste uppfylla båda randkurvornas ekvationer,

$$\left.\begin{aligned} y &= 4 \\ y &= x^2 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (\pm 2, 4).$$

Sammanfattningsvis har vi alltså tre punkter $(-1,1)$, $(-2,4)$ och $(2,4)$ bland vilka f antar sitt största och minsta värde. Eftersom

$$f(-1,1) = -1, \quad f(-2,4) = 0 \quad \text{och} \quad f(2,4) = 8$$

är funktionens största värde 8 och minsta värde -1.

7. Se uppgift 455 i övningsboken till *Analytiska metoder II*.

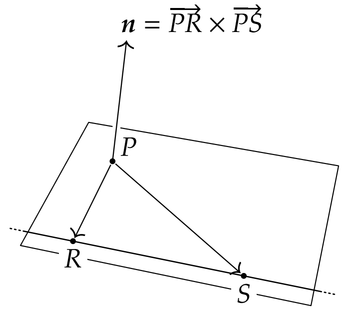
8. Först bestämmer vi en normalvektor till planet. Vi väljer två punkter R och S på linjen och bildar vektorerna $\overrightarrow{PR}$ och $\overrightarrow{PS}$. Vektorerna $\overrightarrow{PR}$ och $\overrightarrow{PS}$ är då parallella med planet vilket gör att deras kryssprodukt $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}$ är en normalvektor till planet.

Tar vi två parametervärden fås

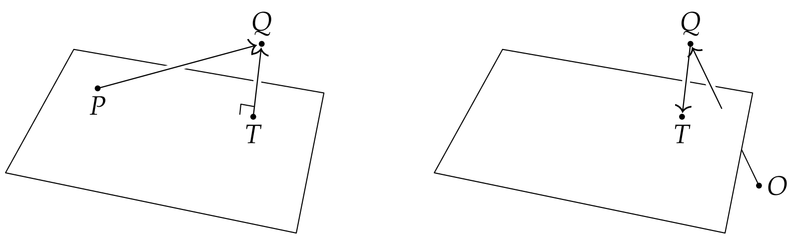
$$\begin{aligned} R &= (1,-1,0), && \text{(svarar mot } t = 0), \\ S &= (5,2,2), && \text{(svarar mot } t = 1), \end{aligned}$$

och då är

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= R - P = (1,-1,0) - (3,1,2) = (-2,-2,-2), \\ \overrightarrow{PS} &= S - P = (5,2,2) - (3,1,2) = (2,1,0), \\ \boldsymbol{n} &= \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS} = (2,-4,2). \end{aligned}$$



Om vi kallar den sökta punkten, som ligger närmast Q, för T så är vektorn $\overrightarrow{TQ}$ parallell med normalen $\boldsymbol{n}$ och vi kan bestämma $\overrightarrow{TQ}$ genom att projicera vektorn $\overrightarrow{PQ}$ på $\boldsymbol{n}$. Punkten T:s koordinater får vi sedan genom att gå från origo via Q till T,



$$\begin{aligned} \overrightarrow{TQ} &= \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\,\boldsymbol{n} = \left\{ \overrightarrow{PQ} = Q - P = (4,-1,6) \right\} = \frac{(4,-1,6)\cdot(2,-4,2)}{2^2 + (-4)^2 + 2^2}\,(2,-4,2) \\ &= \frac{8+4+12}{4+16+4}\,(2,-4,2) = (2,-4,2), \end{aligned}$$

$$T = \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{TQ} = (7,0,8) - (2,-4,2) = (5,4,6).$$

9. Eftersom den sökta linjen går genom punkten $P = (0,0,-1)$ kan vi parametrisera linjen som

$$(x,y,z) = (0,0,-1) + t\,(\alpha,\beta,\gamma),$$

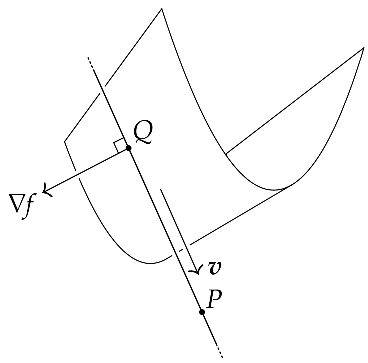
där $\boldsymbol{v} = (\alpha,\beta,\gamma)$ är linjens riktning.

Ytans ekvation kan vi skriva som $f(x,y,z) = z - x^2 - y = 0$. Om vi kallar tangeringspunkten för $Q = (x_0,y_0,z_0)$ så ska dels Q ligga på ytan och därför uppfylla ytans ekvation

$$z_0 = x_0^2 + y_0, \tag{1}$$

dels ytans normalriktning ∇f i punkten Q vara vinkelrät mot linjens riktning $\boldsymbol{v}$,

$$\nabla f(Q)\cdot\boldsymbol{v} = (-2x_0,-1,1)\cdot(\alpha,\beta,\gamma) = -2\alpha x_0 - \beta + \gamma = 0. \tag{2}$$



Punkten Q ska också ligga på linjen vilket betyder att för ett visst parametervärde $t = t_0$ ger linjens parameterekvation punkten Q,

$$0 + \alpha t_0 = x_0, \tag{3}$$
$$0 + \beta t_0 = y_0, \tag{4}$$
$$-1 + \gamma t_0 = z_0. \tag{5}$$

Ekvationer (3), (4) och (5) insatta i (1) och (2) ger

$$-1 + \gamma t_0 = \alpha^2 t_0^2 + \beta t_0, \tag{1'}$$
$$-2\alpha^2 t_0 - \beta + \gamma = 0. \tag{2'}$$

Eftersom vi egentligen bara är intresserade av att bestämma *en* linje kan vi prova om ekvationerna (1′) och (2′) har någon lösning för t.ex. $\alpha = 1$ och $\beta = 0$. Ekvationerna blir i detta fall

$$t_0^2 - \gamma t_0 + 1 = 0, \tag{1''}$$
$$-2t_0 + \gamma = 0. \tag{2''}$$

Multiplicera (2″) med t_0 och addera (1″),

$$-t_0^2 + 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t_0 = \pm 1.$$

Om exempelvis $t_0 = 1$ blir (1″) och (2″)

$$\begin{cases} 1 - \gamma + 1 = 0 \\ -2 + \gamma = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \gamma = 2.$$

Ett svar är alltså linjen $(x,y,z) = (0,0,-1) + t(1,0,2)$.

Anm. Givetvis finns det många andra korrekta svar och allmänt kan man visa att en linje

$$(x,y,z) = (0,0,-1) + t(\alpha,\beta,\gamma)$$

tangerar ytan om och endast om $4\alpha^2 = (\beta+\gamma)^2 \neq 0$.

10. Vektorerna Av och Bv är parallella om det finns ett tal λ så att $Av = \lambda\, Bv$. Vi kan skriva om denna likhet genom att flytta över allt i ena ledet,

$$(A - \lambda B)\, v = \mathbf{0}. \tag{$*$}$$

Detta system har en icke-trivial lösning v om och endast om $\det(A - \lambda B) = 0$, d.v.s.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1-3\lambda & 8+2\lambda \\ 2 & 5+2\lambda & -7-3\lambda \\ 2-2\lambda & 1-6\lambda & 10+4\lambda \end{vmatrix} \; -2$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1-3\lambda & 8+2\lambda \\ 2 & 5+2\lambda & -7-3\lambda \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{utveckla längs den} \\ \text{tredje raden} \end{Bmatrix}$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8+2\lambda \\ 2 & -7-3\lambda \end{vmatrix} + (-6) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1-3\lambda \\ 2 & 5+2\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot (3\lambda^2 - 23) - 6 \cdot (-2\lambda^2 + 3\lambda + 7) = 3\lambda^2 - 18\lambda + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda = 3 \quad \text{(dubbelrot).}$$

Med $\lambda = 3$ gausseliminerar vi systemet $(*)$,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -10 & 14 & 0 \\ 2 & 11 & -16 & 0 \\ -4 & -17 & 22 & 0 \end{array}\right) \; + \;\; -2 \;\; -\tfrac{1}{2} \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \; -5 \;\; -3 \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Från slutschemat kan vi avläsa lösningarna

$$v = \begin{pmatrix} -3t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

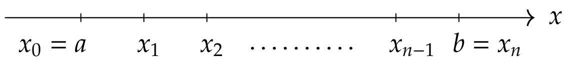
Väljer vi t.ex. $t = 1$ får vi svaret $v = (-3, 2, 1)$.

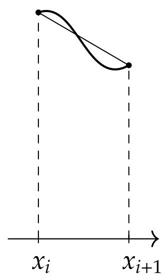
Alternativuppgifter för äldre teknologer

3. Med en partialintegrering kan vi derivera bort logaritmfunktionen

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\ln(x^2+1)\,dx &= \Big[\tfrac{1}{3}x^3\ln(x^2+1)\Big]_0^1 - \int_0^1 \tfrac{1}{3}x^3\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}\,dx\\ &= \tfrac{1}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\int_0^1\Big(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\Big)dx = \tfrac{1}{3}\ln 2 - \tfrac{2}{3}\Big[\tfrac{1}{3}x^3 - x + \arctan x\Big]_0^1 = \tfrac{1}{3}\ln 2 + \tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{6}\pi.\end{aligned}$$

7. a) Vi börjar med att dela in intervallet $[a,b]$ i n delintervall $[x_i, x_{i+1}]$ med lika längd $(b-a)/n$.





Inom intervallet $[x_i, x_{i+1}]$ approximerar vi längden av kurvan $y = f(x)$ med längden av kordan mellan kurvstyckets ändpunkter.

Längd av kurvstycket mellan $x = x_i$ och $x = x_{i+1}$

$\approx$ Längd av linjestycket mellan $(x_i, f(x_i))$ och $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$

$= \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (f(x_i) - f(x_{i+1}))^2}$

Om vi gör denna approximation i varje delintervall blir kurvans totala längd L ungefär lika med

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (f(x_i)-f(x_{i+1}))^2}.$$

I detta uttryck är $x_{i+1} - x_i = (b-a)/n$ och differensen $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ kan skrivas om med medelvärdessatsen till

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

där $x_i < \xi_i < x_{i+1}$. Detta betyder att summaformeln kan skrivas som

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2},$$

och här känner vi igen summan som en Riemannsumma som konvergerar mot integralen

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad \text{när } n\to\infty.$$

b) Använder vi formeln i a-uppgiften fås att båglängden är

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx &= \{\, y' = \tfrac{3}{2}x^{1/2} \,\} = \int_0^2 \sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\,dx = \{\, t = 1+\tfrac{9}{4}x;\ dt = \tfrac{9}{4}\,dx;\ t: 1 \to \tfrac{11}{2} \,\}\\ &= \frac{4}{9}\int_1^{11/2}\sqrt{t}\,dt = \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{2}{3}\Big[\,t\sqrt{t}\,\Big]_1^{11/2} = \tfrac{8}{27}\Big(\tfrac{11}{2}\sqrt{\tfrac{11}{2}} - 1\Big).\end{aligned}$$