1. Vi skriver upp ekvationssystemet i matrisform och gausseliminerar tills vi når trappstegsform,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} -\;\; -2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & a-1 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \end{array}\right) \tfrac{1}{4} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4}(a-1) \\ 0 & 7 & 7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -7 \;\; 2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2}(a+1) \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4}(a-1) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4}(a-1) \end{array}\right)$$

För att detta system ska ha någon lösning måste ekvationen i den sista raden

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -\tfrac{7}{4}(a-1)$$

ha noll i högerledet, d.v.s. $a = 1$.

Med $a = 1$ får vi trappstegsformen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vi markerar den kolonn som inte innehåller en trappstegsetta,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underset{\uparrow}{0} & 0 \end{array}\right),$$

och använder motsvarande variabel z som parameter när vi skriver lösningen

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \quad -t \\ z = \quad\;\; t \end{cases} \qquad (t \text{ parameter}).$$

2. Funktionen f ges av ett elementärt uttryck och är därför differentierbar överallt där den är definierad. Riktningsderivatan av f i punkten $(1,1,1)$ och i en riktning $\hat{\boldsymbol{u}}$ (enhetsvektor) kan därmed beräknas med formeln

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}(1,1,1) = \nabla f(1,1,1) \cdot \hat{\boldsymbol{u}},$$

där ∇f är gradienten av f och är lika med

$$\begin{aligned}\nabla f = \left(f'_x, f'_y, f'_z\right) &= \left(\ln(1+y^2-z^2),\ \frac{x}{1+y^2-z^2}\cdot 2y,\ \frac{x}{1+y^2-z^2}\cdot(-2z) \right) \\ &= \left(\ln(1+y^2-z^2),\ \frac{2xy}{1+y^2-z^2},\ \frac{-2xz}{1+y^2-z^2} \right),\end{aligned}$$

och speciellt är

$$\nabla f(1,1,1) = \left(\ln(1+1^2-1^2),\ \frac{2\cdot 1\cdot 1}{1+1^2-1^2},\ \frac{-2\cdot 1\cdot 1}{1+1^2-1^2} \right) = (0,2,-2).$$

a) Efter att ha normerat vektorn $\boldsymbol{v}$,

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{(0,4,3)}{\sqrt{0^2+4^2+3^2}} = \frac{(0,4,3)}{5} = \left(0, \tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}\right),$$

ger formeln för riktningsderivatan att

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{v}}}(1,1,1) = \nabla f(1,1,1)\cdot \hat{\boldsymbol{v}} = (0,2,-2)\cdot\left(0,\tfrac{4}{5},\tfrac{3}{5}\right) = 0\cdot 0 + 2\cdot\tfrac{4}{5} + (-2)\cdot\tfrac{3}{5} = \tfrac{2}{5}.$$

b) Riktningsderivatan $f'_{\hat{\boldsymbol{u}}} = \nabla f \cdot \hat{\boldsymbol{u}}$ blir maximal när enhetsvektorn $\hat{\boldsymbol{u}}$ väljs i samma riktning som ∇f, d.v.s.

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

och då är

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{u}}} = \nabla f\cdot\hat{\boldsymbol{u}} = \nabla f\cdot\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{|\nabla f|^2}{|\nabla f|} = |\nabla f|.$$

Den maximala riktningsderivatan i punkten $(1,1,1)$ är alltså

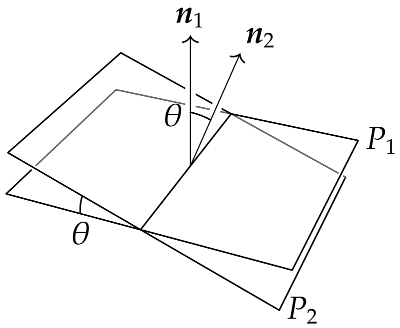
$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}(1,1,1) = |\nabla f(1,1,1)| = \sqrt{0^2+2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

c) En riktning $\hat{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ som ger riktningsderivata 0 måste uppfylla

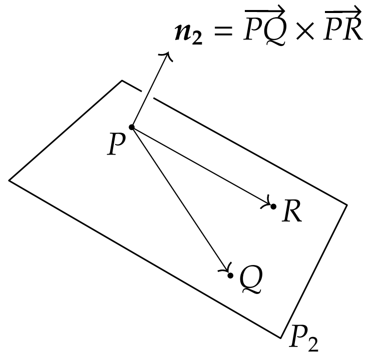
$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}(1,1,1) = \nabla f(1,1,1) \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = (0,2,-2) \cdot (u_1, u_2, u_3) = 2u_2 - 2u_3 = 0,$$

vilket t.ex. är uppfyllt om $\hat{\boldsymbol{u}} = (1,0,0)$.

3. Vinkeln mellan planen är lika med vinkeln mellan deras normaler.



Från planet P_1:s ekvation kan vi direkt avläsa planets normal $\boldsymbol{n}_1$ som koefficienterna framför x, y och z, $\boldsymbol{n}_1 = (1,2,2)$.
Eftersom vi har tre punkter $P = (3,0,1)$, $Q = (6,1,0)$ och $R = (7,1,1)$ i planet P_2 kan vi få en normal till planet genom att bilda två vektorer $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$ som är parallella med planet och kryssa dem $\boldsymbol{n}_2 = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$.



Med siffror får vi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= Q - P = (6,1,0) - (3,0,1) = (3,1,-1), \\
\overrightarrow{PR} &= R - P = (7,1,1) - (3,0,1) = (4,1,0), \\
\boldsymbol{n}_2 &= \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (3,1,-1) \times (4,1,0) = (1,-4,-1).
\end{aligned}$$

Vinkeln θ mellan normalvektorerna (och därmed planen) får vi nu genom att använda skalärprodukten $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = |\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2| \cos\theta$,

$$\begin{aligned}\cos\theta = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|} &= \frac{(1,2,2)\cdot(1,-4,-1)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\,\sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{1\cdot 1 + 2\cdot(-4) + 2\cdot(-1)}{\sqrt{9}\,\sqrt{18}} = \frac{-9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

vilket betyder att $\theta = \frac{3}{4}\pi$, d.v.s. att vinkeln mellan planen är $\frac{3}{4}\pi$ (eller $\frac{1}{4}\pi$ som är supplementvinkeln).

4. Sambandet mellan z uttryckt i x och y, och z uttryckt i u och v kan skrivas som

$$z(x,y) = z\big(u(x,y), v(x,y)\big). \tag{$*$}$$

Vi ska nu transformera $xz'_x + yz'_y$ så att uttrycket blir skrivet helt och hållet i u och v.

Genom att deriverar båda led i $(*)$ med avseende på x respektive y får vi med kedjeregeln ett samband mellan z:s partialderivator i x, y och u, v,

$$\begin{aligned}z'_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = z'_u \cdot y + z'_v \cdot 2x, \\ z'_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = z'_u \cdot x + z'_v \cdot 2y.\end{aligned}$$

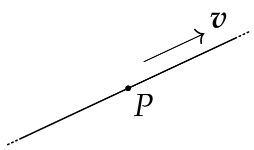
Detta betyder att

$$xz'_x + yz'_y = x\cdot\big(z'_u\,y + z'_v\,2x\big) + y\cdot\big(z'_u\,x + z'_v\,2y\big) = 2xy\,z'_u + 2(x^2+y^2)z'_v.$$

Eftersom $xy = u$ och $x^2 + y^2 = v$ får vi att

$$xz'_x + yz'_y = 2u\,z'_u + 2v\,z'_v.$$

5. För att bestämma en parameterekvation till tangentlinjen behöver vi en punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ på linjen och en (nollskild) vektor $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ som är parallell med linjen.



Då ges linjens ekvation av

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t, \end{cases} \qquad (t \text{ parameter}),$$

eller i vektorform $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(\alpha, \beta, \gamma)$.

Vi väljer enklast punkten P som tangeringspunkten $(1, 1, 0)$.

Tangentlinjens riktning $\boldsymbol{v}$ kan vi bestämma från det faktum att skärningskurvan tillhör båda ytorna. Vi kan skriva de två ytorna som $f(x, y, z) = 0$ och $g(x, y, z) = 0$, där

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 \quad \text{och} \quad g(x, y, z) = y - xz - 1.$$

Eftersom skärningskurvan ligger på ytan $f(x, y, z) = 0$ måste kurvan i punkten $P = (1, 1, 0)$ ha en tangentvektor som vinkelrät mot ytans normal $\nabla f(P)$. På samma sätt måste tangentvektorn vara vinkelrät mot $\nabla g(P)$. Detta betyder att vi får tangentlinjens riktning genom att ta kryssprodukten av ytornas normaler,

$$\boldsymbol{v} = \nabla f(1, 1, 0) \times \nabla g(1, 1, 0),$$

där

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left(f'_x, f'_y, f'_z\right) = (2x, 2y, 2z) \quad \text{och} \\ \nabla g &= \left(g'_x, g'_y, g'_z\right) = (-z, 1, -x), \end{aligned}$$

d.v.s. $\boldsymbol{v} = (2, 2, 0) \times (0, 1, -1) = (-2, 2, 2)$.

Tangentlinjens ekvation är därmed

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = \phantom{1 + {}} 2t, \end{cases}$$

eller $(x, y, z) = (1, 1, 0) + t(-2, 2, 2)$.

6. Stoppar vi in punkterna $(0, -1)$, $(1, 0)$ och $(2, 5)$ i den räta linjens ekvation $y = ax + b$ får vi

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = -1 \\ a \cdot 1 + b = 0 \\ a \cdot 2 + b = 5 \end{cases}$$

eller i matrisform

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen till detta ekvationssystem får vi genom att vänstermultiplicera båda led med transponatet av vänsterledets koefficientmatris

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

och lösa detta system (den s.k. normalekvationen).

Multiplicerar vi ihop matriserna

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

så ser vi att systemet blir

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

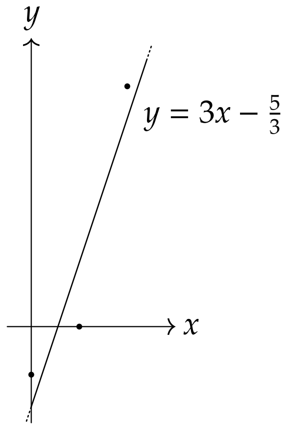
Gausseliminering ger oss lösningen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 10 \\ 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \tfrac{1}{5} \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{5} & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} -3 \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{5} & 2 \\ 0 & \frac{6}{5} & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \tfrac{5}{6} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -\tfrac{3}{5} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right) \qquad \text{d.v.s. } a = 3 \text{ och } b = -\tfrac{5}{3}.$$

Den linje som bäst anpassar till punkterna i minstakvadratmening är $y = 3x - \frac{5}{3}$.



Medelfelet i approximationen får vi genom att stoppa in de framräknade värdena på a och b i ursprungsekvationerna

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

flytta över allt i vänsterledet

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och räkna ut längden av vektorn i vänsterledet delat med roten ur antalet ekvationer (d.v.s. $\sqrt{3}$). Vi får

$$\begin{aligned} \text{medelfel} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\| \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\| \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(-\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{4}{3})^2 + (-\tfrac{2}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

7. Funktionen f har en kritisk punkt i $(x, y) = (1, 2)$ om gradienten av f är noll i punkten. Med andra ord, om f:s partialderivator är noll,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \Big(4x + by + 2\Big)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 6 + 2b = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \Big(bx + 2y + c\Big)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 4 + b + c = 0.$$

Detta är bara uppfyllt om $b = -3$ och $c = -1$.

Den kritiska punktens karaktär avgörs av andraderivatorna.

Metod 1 (Direkt villkor)

Vi sätter

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx}(1,2) = 4, \\ B &= f''_{xy}(1,2) = b = -3, \\ C &= f''_{yy}(1,2) = 2, \end{aligned}$$

och då får vi att $AC - B^2 = 4 \cdot 2 - (-3)^2 = -1 < 0$, vilket betyder att den kritiska punkten är en sadelpunkt.

Metod 2 (Hessianens egenvärden)

Hessianen i punkten $(1, 2)$ blir

$$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(1,2) & f''_{yx}(1,2) \\ f''_{xy}(1,2) & f''_{yy}(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

och dess egenvärden ges av den karakteristiska ekvationen

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = 3 \pm \sqrt{10}.$$

Hessianen har alltså ett negativt och positivt egenvärde, vilket betyder att den kritiska punkten är en sadelpunkt.

8. Se exempel 8.8 i *Linjär geometri och algebra*.

9. a) Låt kurvans parametrisering vara $\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, där $x(t)$, $y(t)$ och $z(t)$ är kontinuerligt deriverbara funktioner. Eftersom kurvan ligger på ytan uppfyller den ytans ekvation för alla t,

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) \equiv 0.$$

Kedjeregeln ger då att

$$\frac{d}{dt}F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = F'_x \cdot x'(t) + F'_y \cdot y'(t) + F'_z \cdot z'(t) \equiv 0.$$

Detta uttryck kan vi se som en skalärprodukt

$$\big(F'_x, F'_y, F'_z\big) \cdot (x', y', z') \equiv 0,$$

vilket visar att parameterkurvans riktningsvektor $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$ alltid är vinkelrät mot $\operatorname{grad} F = (F'_x, F'_y, F'_z)$.

b) Låt $\boldsymbol{r}(t)$ vara en godtycklig regulär parameterkurva som ligger på ytan och passerar genom punkten P när $t = 0$. Då vet vi enligt a-uppgiften att kurvans tangentvektor $\boldsymbol{r}'(0)$ är vinkelrät mot $\operatorname{grad} F(P)$. Eftersom $\boldsymbol{r}(t)$ är en godtycklig regulär kurva är $\boldsymbol{r}'(0)$ en godtycklig tangentvektor till ytan i punkten P. Detta betyder att $\operatorname{grad} F(P)$ är vinkelrät mot alla tangenter till ytan i punkten P, d.v.s. $\operatorname{grad} F(P)$ är vinkelrät mot ytans tangentplan i punkten P.

10. Antag att matrisen A har de linjärt oberoende egenvektorerna $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ och motsvarande egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$,

$$A\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1\boldsymbol{u}_1, \quad A\boldsymbol{u}_2 = \lambda_2\boldsymbol{u}_2, \quad \ldots, \quad A\boldsymbol{u}_n = \lambda_n\boldsymbol{u}_n.$$

Vi kan sammanfatta alla dessa vektorsamband genom att rada upp vektorerna som kolonner i en matris,

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\boldsymbol{u}_1 & A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & A\boldsymbol{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1\boldsymbol{u}_1 & \lambda_2\boldsymbol{u}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Detta matrissamband är i själva verket den likhet som vi ska visa, för om vi börjar med vänsterledet så kan det skrivas som

$$A\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = AC,$$

där C är matrisen med egenvektorerna $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$ som kolonner.
Vektorerna i högerledet kan skrivas som

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + 0\,\boldsymbol{u}_2 + 0\,\boldsymbol{u}_3 + \cdots + 0\,\boldsymbol{u}_n = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 \boldsymbol{u}_2 = 0\,\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + 0\,\boldsymbol{u}_3 + \cdots + 0\,\boldsymbol{u}_n = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

o.s.v.

vilket betyder att högerledet är lika med

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = CD.$$

Detta visar att $AC = CD$.