Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2001–12–18, kl. 8^{00}–13^{00}.

5B1116 Matematik 2, för E, I, M, Media och T.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.
Lösningsförslag finns efter skrivningstidens slut på kurshemsidan.
Inga hjälpmedel!

1. Bestäm a så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ x + 2y + z = a \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

får oändligt många lösningar samt bestäm dessa. (3p)

2. Låt $f(x, y, z) = x \ln(1 + y^2 - z^2)$.
   a) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(1, 1, 1)$ i riktningen av vektorn $\boldsymbol{v} = (0, 4, 3)$. (1p)
   b) Bestäm den maximala riktningsderivatan av f i punkten $(1, 1, 1)$. (1p)
   c) Bestäm någon riktning i vilken riktningsderivatan är 0 i punkten $(1, 1, 1)$. (1p)

3. Planet P_1 har ekvationen $x + 2y + 2z = 1$ och planet P_2 är det plan som går genom punkterna $(3, 0, 1)$, $(6, 1, 0)$ och $(7, 1, 1)$. Bestäm vinkeln mellan planen P_1 och P_2. (3p)

4. Transformera uttrycket $xz'_x + yz'_y$ genom att införa variablerna u och v enligt $u = xy$ och $v = x^2 + y^2$. (3p)

5. Bestäm ekvationen för tangentlinjen (i parameterform) till skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ och $y = xz + 1$ i punkten $(1, 1, 0)$. (3p)

V.g. vänd!

6. Anpassa i minstakvadratmening en rät linje $y = ax + b$ till punkterna $(0,-1)$, $(1,0)$ och $(2,5)$. Bestäm också medelfelet. (4p)

7. Bestäm konstanterna b och c så att funktionen $f(x,y) = 2x^2 + bxy + y^2 + 2x + cy$ får en kritisk (stationär) punkt i $(x,y) = (1,2)$. Bestäm även den kritiska punktens karaktär. (4p)

8. Avgör vilken typ av kurva i planet som bestäms av ekvationen

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 10x + 70y - 75 = 0$$

och skriv ekvationen i huvudaxelform. (4p)

9. En yta definieras av $F(x,y,z) = 0$, där F är en differentierbar funktion.

   a) Visa att en regulär parameterkurva som ligger på ytan alltid har en tangentvektor som är vinkelrät mot $\operatorname{grad} F$. (2p)

   b) Visa att $\operatorname{grad} F(P)$ är vinkelrät mot ytans tangentplan i punkten P. (2p)

10. Matrisen C:s kolonner består av n stycken linjärt oberoende egenvektorer till $n \times n$–matrisen A. Härled utgående från definitionen av egenvärde/egenvektor att $AC = CD$, där D är en diagonalmatris med A:s egenvärden som diagonalelement. (4p)